CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

175

नवीन

हाई स्कूल अंकगणित तथा सांख्यिकी

ओरियन्टल बुक कम्पनी

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

[कक्षा ९ तथा १० के १९७१ के लिए माध्यमिक शिक्षा परिषद द्वारा स्वीकृत पाठ्यक्रमानुसार]

नवीन हाई स्कूल अंकगणित तथा सांख्यिकी

[उत्तर प्रदेशीय शिक्षा बोर्ड की हाई स्कूल परीक्षा के लिए]

रघुराज सिंह, एम० एस-सी०,
अध्यक्ष, गणित विभाग
उदय प्रताप कालेज, वाराणसी

एवं

राम बहादुर सिंह, एम० ए०
प्रवक्ता, गणित विभाग,
उदय प्रताप कालेज, वाराणसी

ओरियन्टल बुक कम्पनी
वाराणसी • कलकत्ता

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रकाशक :
श्री के० सी० भट्टाचार्य बी० ए०
ओरियन्टल बुक कम्पनी
३५/१०१ जंगमबाड़ी वाराणसी।

प्रथम संस्करण : १९६९
मूल्य : २ रु०

मुद्रक :
श्री एन० जी० सहगल
यू० पी० प्रिंटिंग प्रेस
४२, ताशकन्द मार्ग
इलाहाबाद।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

भूमिका

प्रस्तुत पुस्तक उत्तर प्रदेशीय शिक्षा बोर्ड की हाई स्कूल परीक्षा की आवश्यकताओं का ध्यान में रखकर लिखी गई है। अंकगणित में निर्दिष्ट विषयों को एक विशेष क्रम में रखा गया है ताकि एक विषय का उपयोग अगले विषय में किया जा सके। अनुपात तथा समानुपात का विषय सबसे मौलिक है, अतएव उसे सर्वप्रथम दिया गया है; फिर साझा, प्रतिशतता, लाभ हानि तथा चक्रवृद्धि ब्याज के विषय दिये गए हैं। वृत्त का विषय अन्त में दिया गया है। प्रश्नों में निदित सिद्धान्तों को सरल रूप में दिया गया है। लगभग सभी प्रश्न मौलिक तो नहीं किन्तु नवीन हैं। कुछ अच्छे तथा नये प्रश्नों को दिया गया है।

सांख्यिकी का विषय हाई स्कूल के विद्यार्थियों के लिए सर्वथा नया है। अतः इसके मौलिक सिद्धान्तों तथा विधियों को विस्तार से समझाया गया है। इस विषय को रोचक बनाने के लिए लेखाचित्रों तथा रेखाचित्रों पर एक अलग अध्याय दे दिया गया है। सभी पारिभाषिक शब्द भारत सरकार द्वारा प्रकाशित वैज्ञानिक शब्दावली के अनुसार हैं।

आशा है पुस्तक उपयोगी सिद्ध होगी। किसी प्रकार का सुझाव या किसी त्रुटि का संशोधन कृतज्ञता पूर्वक स्वीकार होगा।

लेखक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१९७१ की हाई स्कूल परीक्षा का नया पाठ्यक्रम

अंकगणित (Arithmetic)

१. वृत्त का क्षेत्रफल (Area of a circle)
२. प्रविशतता (Percentage)
३. लाभ तथा हानि (Profit and Loss)
४. अनुपात तथा समानुपात (Ratio and Proportion)
५. सहभागिता अथवा साझा (Partnership)
६. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

सांख्यिकी (Statistics)

१. बारंबारता बंटन (Frequency Distribution)
२. केन्द्रीय प्रवृत्तियों की मापें (Measure of Central Tendency)

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक
(Mean, Median and Mode)

३. विक्षेपण की मापें (Measures of Dispersion)

माध्य विचलन तथा मानक विचलन
(Mean Deviation and Standard Deviation)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

विषय-सूची

अंकगणित

अध्याय

१. अनुपात तथा समानुपात (Ratio and Proportion) ... १
२. साझा या सहभागिता (Partnership) ... ३३
३. प्रतिशतता (Percenrages) ... ४४
४. लाभ तथा हानि (Profit and Loss) ... ५७
५. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) ... ८०
६. वृत्त का क्षेत्रफल (Area of a circle) ... १०६

संख्यिकी

१. परिचयात्मक (Introduction) ... १३१
२. सांख्यिकीय समंकों का संकलन (Collection of Statistical Data) १३७
३. समंकों का वर्गीकरण और सारणीकरण (Classification and Tabulation of Data) ... १४४
४. समंकों का रेखाचित्रीय और लेखाचित्रीय प्रदर्शन (Diagramatic and Graphical Representation) ... १६१
५. केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (Measures of Central Tendency) १८४
६. अपकिरण की मापें (Measures of Dispersion) ... २८८

उत्तरमाला

१. अंकगणित (Arithmetic) २४८
२. सांख्यिकीय (Statistics) २५४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

खण्ड १ | अंकगणित

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

1 अनुपात तथा समानुपात
RATIO AND PROPORTION

अनुपात (Ratio) : जब हमें एक ही प्रकार की (सजातीय) दो राशियों की तुलना करनी होती है, तो हम ज्ञात करते हैं कि एक राशि दूसरी राशि की कितने गुना है अथवा कौन सी भिन्न है। इसके लिये हम एक राशि को दूसरी राशि से भाग देते हैं। इस प्रकार से प्राप्त भजनफल यह प्रकट करता है कि एक राशि दूसरी राशि का कितने गुना अथवा कौन सी भिन्न है। इस भजनफल को उन राशियों के बीच का अनुपात कहते हैं। इस प्रकार,

दो सजातीय राशियों का अनुपात वह संख्या है जो एक राशि को दूसरी राशि से भाग देने से प्राप्त होती है तथा जो यह प्रकट करती है कि एक राशि दूसरी राशि का कितने गुना अथवा कौन सी भिन्न है।

जैसे, राम के पास १५ रुपया है और श्याम के पास १२ रुपया है, तो राम और श्याम के रुपयों का अनुपात $\frac{१५ \text{ रु०}}{१२ \text{ रु०}}$ अर्थात् $\frac{१५}{१२}$ या $\frac{५}{४}$ है।

अनुपात का चिन्ह : है। अतः अनुपात $\frac{५}{४}$ को ५ : ४ लिखते हैं, जिसे '५ सम्बन्धे ४' पढ़ते हैं। चिन्ह : वास्तव में भाग के चिन्ह $\div$ का ही संक्षिप्त रूप है।

अनुपात की विशेषतायें—

१. अनुपात एक ही प्रकार की अथवा सजातीय राशियों के बीच होता है। जब राशियां भिन्न जाति की हों तो उनमें अनुपात नहीं लिया जाता है। जैसे १० रु० और १५ लिटर के बीच कोई अनुपात नहीं है। किन्तु १० रु० तथा १५ रु० या १० लिटर तथा १५ लिटर के बीच अनुपात है जो $\frac{१०}{१५}$ या $\frac{२}{३}$ या २ : ३ है। सजातीय राशियों या एक ही प्रकार की राशियों से अर्थ यह है कि ये राशियाँ एक ही इकाई द्वारा व्यक्त हों। इकाइयों के उदाहरण है, रुपया,

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पैसा, लिटर, मीटर, सेन्टीमीटर, घन्टा, मिनट, इत्यादि। शुद्ध संख्यायें भी सजातीय राशियाँ होती हैं। जैसे, १, २, ३, इत्यादि सजातीय राशियाँ है।

२. अनुपात शुद्ध संख्या होता है। जैसे, १५ रु० तथा १८ रु० का अनुपात $\frac{१५}{१८}$ या $\frac{५}{६}$ है जो शुद्ध संख्या है न कि रुपया। ध्यान दो कि १५ कीलो तथा १८ कीलो में भी अनुपात $\frac{५}{६}$ है, यद्यपि राशियाँ भिन्न हैं।

३ अनुपात प्रकट करने वाली संख्याओं को उसके पद (terms) कहते हैं। प्रथम पद को पूर्व पद (antecedent) तथा दूसरे पद को उत्तर पद (consequent) कहते हैं। जैसे, अनुपात ७ : ३ में पूर्व पद ७ तथा उत्तर पद ३ है। यदि अनुपात भिन्न से प्रकट किया जाय तो पूर्व पद भिन्न का अंश तथा उत्तर पद उसका हर होता है। जैसे, ७ : ३ $=\frac{७}{३}$ ।

४. एक ही अनुपात कई प्रकार से प्रकट किया जा सकता है। जैसे, अनुपात २ : ३, अनुपात ४ : ६ या १० : १५ या $\frac{१}{३}$: $\frac{१}{२}$ के समान है। अर्थात्

किसी अनुपात के दोनों पदों को एक ही संख्या से गुणा करने या भाग देने से उसके मान में अन्तर नहीं आता। इसका कारण यह है कि अनुपात वास्तव में एक भिन्न है और किसी भिन्न में अंश तथा हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करने अथवा भाग देने से उसके मान में अन्तर नहीं आता।

५. प्रायः अनुपात छोटी से छोटी पूर्णाङ्क संख्याओं द्वारा प्रकट किया जाता है। इसको अनुपात का न्यूनतम रूप (shortest form) कहते हैं।

जैसे ६० : ३६ $=\frac{६०}{३६}=\frac{५}{३}$ या ५ : ३

फिर $\frac{३}{५} : \frac{२}{५} = \frac{३}{५} / \frac{२}{५} = \frac{३}{५} \times \frac{५}{२} = \frac{३}{२}$ या ३ : २

और ·६ : ·१५ $= \frac{·६}{·१५} = \frac{६०}{१५} = \frac{४}{१}$ या ४ : १

उदाहरण १ : ५ रु० १० पै० तथा १९ रु० ३८ पै० के बीच अनुपात न्यूनतम रूप में ज्ञात करो।

५ रु० १० पै० = ५१० पै०

१९ रु० ३८ पै० = १९३८ पै०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ अभीष्ट अनुपात $=\frac{५×१०}{१९×१०}=\frac{५}{१९}$ या ५ : १९

उदाहरण २. ५ : ६ तथा ६ : ७ में कौन-सा अनुपात बड़ा है ?

५ : ६ $=\frac{५}{६}$ तथा ६ : ७ $=\frac{६}{७}$

भिन्न $\frac{५}{६}$ तथा $\frac{६}{७}$ हर के समान करने पर वे क्रमशः $\frac{३५}{४२}$ तथा $\frac{३६}{४२}$ हैं, इनमें $\frac{३६}{४२}$ बड़ी भिन्न है ।

∴ अनुपात ६ : ७ बड़ा है ।

उदाहरण ३. एक अनुपात में दोनों पदों का अन्तर २८ है । यदि अनुपात का न्यूनतम रूप १६ : ९ है, तो उसे ज्ञात करो ।

१६:९ में दोनों पदों का अन्तर ७ है ।

अतः अनुपात १६ : ९ के पदों को $\frac{२८}{७}$ या ४ से गुणा करने पर ६४ : ३६ मिलता है जो अभीष्ट अनुपात है ।

उदाहरण ४. २०० रु० को दो लड़कों में १६ : ९ के अनुपात में बांटो ।

अनुपात १६ : ९ में दोनों पदों का योग २५ है ।

अब २००=२५×८, अर्थात् २५ का ८ गुना

अतः अनुपात १६:९ को ८ से गुणा करने पर १२८ : ७२ मिला ।

∴ अभीष्ट भाग १२८ रु० और ७२ रु० हैं ।

उदाहरण ५. वह अनुपात ज्ञात करो जिसका पूर्व पद १५ है तथा जिसका मान $\frac{३}{८}$ है ।

अनुपात ३ : ८ है जिसका पूर्व पद ३ है ।

अब १५=३×५, अर्थात् ३ का ५ गुना ।

अतः ३ : ८ को ५ से गुणा करने पर अभीष्ट अनुपात १५ : ४० होता है ।

उदाहरण ६. अ तथा ब का अनुपात ३ : ४ है और ब तथा स का अनुपात ५ : ६ है, तो अ तथा स का अनुपात ज्ञात करो ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नानुसार,

$\frac{अ}{ब}=\frac{३}{४}$ तथा $\frac{ब}{स}=\frac{५}{६}$,

गुणा करने पर, $\frac{अ}{ब}\times\frac{ब}{स}=\frac{३}{४}\times\frac{५}{६}$

$\therefore \frac{अ}{स}=\frac{५}{८}$

$\therefore$ अ : स = ५ : ८

उदाहरण ७. २८ को दो ऐसे भागों में बांटो कि एक भाग का ४ गुना तथा दूसरे भाग का ७ गुना मिल कर १६० के बराबर हो।

पहला भाग + दूसरा भाग = २८ ...(१)

४ × (पहला भाग) + ७ × (दूसरा भाग) = १६० ...(२)

(१) से ४ को गुणा करने पर,

४ × (पहला भाग) + ४ × (दूसरा भाग) = २८ × ४ = ११२ ...(३)

(३) को (२) में से घटाने पर,

३ × (दूसरा भाग) = १६० − ११२ = ४८

$\therefore$ दूसरा भाग = $\frac{४८}{३}$ = १६

$\therefore$ पहला भाग = २८ − १६ = १२

अतः अभीष्ट भाग १२ तथा १६ हैं।

प्रश्नावली १ (क)

१. निम्नलिखित अनुपातों को न्यूनतम रूप में प्रकट करो :

(क) ७२ : १८० (ख) ५ : ३$\frac{३}{४}$, (ग) ·६ : ४$\frac{४}{५}$

(घ) १·५ : ·०७२ (च) ५ रु० ६० पै० : १२ रु० ८० पै०

(छ) ४ मी० ७२ सेमी० २ मी० ९५ सेमी०

२. निम्नलिखित अनुपातों में कौन बड़ा है ?

(क) ४ : ५ तथा ६ : ७

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) ७ रु० २० पै० : ६ रु० ६० पै० तथा २ घंटा १५ मिनट : ३ घंटा ४५

३. यदि अनुपात ६ : ७ अनुपात ५ : य से बड़ा है, तो य का न्यूनतम मान ज्ञात करो।

४. एक ग्वाला १६ सेर दूध में ६ सेर पानी मिलाता है तथा दूसरा १८ सेर दूध में ७½ सेर पानी मिलाता है तो किसका दूध लेना अच्छा है ?

५. एक धोती का मूल्य १२ रु० ६० पै० है और वह ८ महीने चलती है तथा एक पैन्ट का मूल्य ४० रु० ५० पै० है और वह ३० महीने चलती है। तो कौन-सा कपड़ा पहनने में कम खर्च है होगा ?

६. राम और श्याम के पास ५ : १२ के अनुपात में आम हैं। यदि राम के पास श्याम से २१ आम कम हों, तो दोनों के पास कितने-कितने आम हैं ?

७. दिल्ली और कलकत्ता के बीच की दूरी रेल से १८९० कि मी० है। एक रेलगाड़ी दिल्ली से कलकत्ता की ओर और दूसरी कलकत्ता से दिल्ली की ओर एक ही समय चलना प्रारंभ करती है। यदि उनकी औसत गतियों का अनुपात क्रमशः ४ : ५ है। तो एक दूसरे से मिलने के पहले प्रत्येक रेलगाड़ी कितनी दूरी चल चुकी होगी ? यह भी मालूम करो कि जब दूसरी रेलगाड़ी दिल्ली पहुँचती है, उस समय पहली को कलकत्ता पहुँचने में कितने कि मी० और चलना है।

८. एक नगर में स्त्री तथा पुरुषों की संख्या में १६: १७ का अनुपात है। यदि पुरुषों की संख्या १०२०० है, तो स्त्रियों की संख्या बताओ।

९. दो संख्याओं का अनुपात २४ : २० है और उनका लघुत्तम समापवर्त्य ७२० है। संख्यायें ज्ञात करो।

१०. यदि अनुपात ७ :८ के प्रत्येक पदों में १ जोड़ दिया जाय तो उसका मान बढ़ेगा या घटेगा ?

यदि कोई लड़का भूल से ८ : ७ लेकर इस प्रश्न को हल करता है तो उसका उत्तर क्या होगा।

११. एक वर्तन में २० लिटर शुद्ध दूध तथा ४ लिटर पानी मिला है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उसमें से ५ लिटर मिश्रित दूध निकाल कर फिर २ लिटर शुद्ध दूध तथा २ लिटर पानी मिला दिया जाता है। तो अब मिश्रण में दूध व पानी का अनुपात बताओ।

१२. एक परिवार का मासिक दूध का व्यय ३० रु० है। यदि दूध का दाम १ रु० प्रति लिटर से १ रु० २० पै० प्रति लिटर हो जाता है, तो दूध की मात्रा में किस अनुपात में कमी की जाय कि व्यय उतना ही हो ?

१३. २०० रु० को मोहन और सोहन में इस प्रकार बाँटो कि मोहन के भाग का ४ गुना तथा सोहन के भाग का ६ गुना १००० रु० हो।

१४. अ तथा ब के धनों में ३ : ४, ब तथा स के धनों में ५ : ६ और स तथा द के धनों में ८ : ९ के अनुपात हैं। यदि द के पास ४५ रुपया, है तो अ के पास कितना रुपया है ?

१५. चार समान बर्तन हैं। पहले में दूध तथा पानी का अनुपात १:२ का, दूसरे में २ : ३ का, तीसरे में ३:४ का तथा चौथे में ४ : ५ का है। यदि चारों बर्तनों के दूध को मिला दिया जाय तो मिश्रण में दूध व पानी का क्या अनुपात होगा ?

१६. एक कुत्ता एक खरगोश का पीछा करता है। जितने समय में कुत्ता ४ छलांग मारता है उतने में खरगोश ७ छलांग मारता है। कुत्ते की ५ छलांग खरगोश की ८ छलांग के बराबर है। क्या कुत्ता खरगोश को पकड़ सकता है ?

१७. ४० लिटर मिश्रण में शराब और पानी का अनुपात २ : ३ है। उसमें कितनी शराब और मिला दिया जाय कि अनुपात ३ : ७ हो जाय ?

१८. एक डालर ७·५० रु० के बराबर है और एक शिलिंग ०·८० रु० के बराबर है। एक डालर कितने शिलिंग के बराबर है।

समानुपात (Proportion)

परिभाषा : अनुपात २ : ३ तथा ६ : ९ समान हैं। यदि इनको एक साथ लिख दिया जाय तो २ : ३=६ : ९ एक समानुपात बन जायेगा। तथा संख्यायें २,३,६ और ९ परस्पर समानुपाती कही जायेंगी।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जब दो अनुपात समान हों, तो उनको बराबर करने पर एक समानुपात बनता है, तथा चारों संख्यायें समानुपाती कहलाती हैं।

जैसे—४ रु० ५० पै० तथा २ रु० ७० पै० का अनुपात

$$=\frac{\text{४ रु० ५० पै०}}{\text{२ रु० ७० पै०}}=\frac{४५०}{२७०}=\frac{५}{३}$$

और २ मी० ५० सेमी० तथा १ मी० ५० सेमी० का अनुपात

$$=\frac{\text{२ मी० ५० सेमी०}}{\text{१ मी० ५० सेमी}}=\frac{२५०}{१५०}=\frac{५}{३}$$

ये दोनों अनुपात बराबर हैं। अतः

४ रु० ५० पै० : २ रु० ७० पै०=२ मी० ५० सेमी० : १ मी० ५० सेमी० और यह एक समानुपात का उदाहरण है। यहां चारों राशियां समानुपाती हैं।

टिप्पणी—समानुपात में पहली तथा दूसरी राशियाँ एक जाति की होती हैं और तीसरी तथा चौथी राशियाँ एक जाति की होती है। चारों राशियों का सजातीय होना आवश्यक नहीं है।

यदि चार राशियां अ, ब, स, तथा द समानुपाती हैं, तो यह निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है :—

(१) अ : ब=स : द

(२) अ : ब :: स : द

(३) $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{स}}{\text{द}}$

परिभाषायें : यदि अ : ब : : स : द कोई समानुपात है तो—

१. चारों राशियाँ अ, ब, स, द समानुपात की पद (term) कहलाती है।

२. अ पहला पद, ब दूसरा पद, स तीसरा पद और द चौथापद कहलाता है

३. अ तथा द को समानुपात का वाह्य पद (extremes) कहते हैं।

४. ब तथा स को मध्य पद (means) कहते हैं

५. द को अ, ब, स का चतुर्थ समानुपाती (fourth proportional) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

समानुपात की विशेषतायें :

(१) किसी समानुपात में बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

मान लिया अ : ब : : स : द एक समानुपात है।

$$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{स}{द}$$

$$\therefore अ द = ब स$$

इस प्रकार उपरोक्त गुण सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण १. समानुपात ४ : ५ : : १२ : १५ में

$$४ \times १५ = ५ \times १२ = ६०$$

इस गुण के प्रयोग से यदि किसी समानुपात के तीन पद ज्ञात हों, तो चौथा पद ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण २. समानुपात ६ : १२ : : ... : ४० में छूटा पद ज्ञात करो।

मान लिया छूटा हुआ पद य है।

अतः ६ : १२ : : य : ४०

$$\therefore \quad ६ \times ४० = १२ \times य$$

$$\therefore \quad य = \frac{६ \times ४०}{१२} = २०$$

उदाहरण ३. ८, ११, १३, १९ में से क्या घटाया जाय कि शेषफल समानुपाती हों।

मान लिया य घटाया जाता है।

$$\therefore \quad ८ - य : ११ - य : : १३ - य : १९ - य$$

$$\therefore \quad (८ - य)(१९ - य) = (११ - य)(१३ - य)$$

$$\text{या } १५२ - २७ य + य^२ = १४३ - २४ य + य^२$$

$$\text{या } ३ य = ९$$

$$\therefore \quad य = ३$$

उदाहरण ४. दूध और पानी के १५ लिटर मिश्रण में ५ लिटर पानी है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसमें कितना पानी और मिला दिया जाय कि मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात ५ : ३ हो जाय।

२० लिटर मिश्रण में दूध की मात्रा=१५–५=१० लिटर। दूसरी बार भी मिश्रण में दूध की मात्रा १० लिटर है। मान लिया दूसरी बार पानी की मात्रा य लिटर है।

अतः १० : य : : ५ : ३

∴ १०×३=य×५

∴ $य=\frac{१०\times३}{५}=६$

पहले मिश्रण में ५ लिटर पानी था।

अतः ६ –५=१ लिटर पानी और मिलाया जायगा।

विततानुपात (Continued proportion) : तीन राशियाँ अ, ब तथा स ऐसी हैं कि अ : ब : : ब : स, तो इस समानुपात को विततानुपात कहते हैं और यह राशियाँ विततानुपाती कहलाती हैं। इसमें द्वितीय राशि ब को अ तथा स का मध्यानुपाती और तृतीय राशि स को अ तथा ब का तृतीयानुपाती कहते हैं।

इस प्रकार ४, ६, ९ विततानुपाती हैं, क्योंकि ४ : ६ : : ६ : ९। यहाँ ४ तथा ९ का मध्यानुपाती ६ और ४ तथा ६ का तृतीयानुपाती ९ है।

उदाहरण १. ४ और ६ का तृतीयानुपाती निकालो।

मान लिया तृतीयानुपाती य है।

अतः ४ : ६ : : ६ : य

∴ ४ य=६×६

∴ $य=\frac{६\times६}{४}$

$=९$

उदाहरण २. ९ तथा २५ का मध्यानुपाती निकालो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया मध्यानुपाती य है।

अतः १ : य : : य : २५

∴ १×२५=य×य

∴ $य^2$=१×२५

∴ य =३×५

=१५

प्रश्नावली १ (ख)

१. निम्नलिखित में य का मान ज्ञात करो :

(क) ४ : ५ : : १२ : य, (ख) ३ : ४ : : य : १५

(ग) २·५ : य : : ३ $\frac{३}{४}$: ४ (घ) य : ४५ : : ३६ : ५४

२. निम्नलिखित प्रश्नों में मध्यानुपाती ज्ञात करो :

(क) ४ और १६ (ख) ४ और ४९ (ग) ३ और २७

३. निम्नलिखित का तृतीयानुपाती ज्ञात करो :

(क) ६ और ३० (ख) ·५२८ और ·७७

(ग) ३ $\frac{१}{५}$ और ४ $\frac{४}{५}$

४. निम्नलिखित का चतुर्थानुपाती ज्ञात करो :

(क) ४, ५, १८ (ख) ५ रु०, ६ रु० २५ पै०, १२ मिनट

(ग) २० आदमी, ७० आदमी, ८० दिन

५. पिता और पुत्र की आयु में ७ : ३ का अनुपात है। यदि पुत्र की आयु १२ वर्ष है तो पिता की आयु क्या है ?

६. वृत्त की परिधि और व्यास में २२ : ७ का अनुपात है। किसी वृत्त की परिधि २२० सेमी० है तो व्यास ज्ञात करो।

७. जमीन पर खड़े एक आदमी की परछाईं ७ फी० ६ इंच लम्बी है और पास ही एक ताड़ के पेड़ की परछाईं ९० फीट लम्बी है। यदि आदमी की लम्बाई ६ फीट है, तो ताड़ के पेड़ की ऊँचाई बताओ।

८. एक एकड़ ४८४० वर्ग गज तथा एक बीघा ३०२५ वर्ग गज के बराबर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

होते हैं। एक खेत का क्षेत्रफल १२·५ एकड़ है; तो उसका क्षेत्रफल बीघों मे क्या है?

९. अनन्त और बसन्त के पास ५ : ७ के अनुपात में रुपये हैं। यदि दोनों के पास के रुपयों में ५० रु० का अन्तर है, तो दोनों के पास कुल मिलाकर कितने रुपये हैं?

१०. कुछ रुपये को दो आदमियों में ६ : ५ के अनुपात में बाँटा जाता है और एक को दूसरे से १५ रु० कम मिलता है। यदि उसी रुपये को उनमें ७:४ के अनुपात में बाँटा जाय, तो दोनों के हिस्सों में क्या अन्तर होगा?

११. एक पीपे में शराब तथा पानी में ७: ३ का अनुपात है और दूसरे में ५ : ३ का। यदि पहले पीपे से २० लिटर तथा दूसरे से २४ लिटर लेकर मिला दिया जाय, तो मिश्रण में शराब तथा पानी का क्या अनुपात होगा?

१२. समान भार के ५ सिक्कों को जो सोना और चांदी से बने हैं पिघलाकर एक सिक्का बनाया जाता है। पहले सिक्के में सोना और चांदी का अनुपात ३ : १, दूसरे में ५ : ४ तथा शेष प्रत्येक में ७ : ५ है। तो नये सिक्के में सोना और चांदी का अनुपात ज्ञात करो।

१३. एक आयत का क्षेत्र फल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि आयत की लम्बाई तथा वर्ग की भुजा में ५ : ३ का अनुपात है, तो आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात निकालो।

१४. ९,१३,१९,३१ में से कितना घटा दिया जाय कि शेषफल समानुपाती हों?

१५. २०,३५,५९ में क्या जोड़ दिया जाय कि योगफल विततानुपाती हो?

समानुपात के भेद :—समानुपात दो प्रकार के होते हैं :

१. सरल समानुपात (Simple proportion)

२. मिश्र समानुपात (Compound proportion)

सरल समानुपात वह समानुपात है जिसमें केवल दो अनुपात सम्मिलित हों।

मिश्र समानुपात वह समानुपात है जिसमें दो से अधिक अनुपात सम्मिलित हों।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पहले हम सरल समानुपात का अध्ययन करेंगे।

सरल समानुपात दो प्रकार के होते हैं :

१. अनुक्रमानुपात या अनुलोमानुपात (Direct Proportion)

२. व्युत्क्रमानुपात या विलोमानुपात (Inverse Proportion)

अनुक्रमानुपात—यदि एक आदमी २ घंटे में ७ मील जाता है तो १ घंटे में ३½ मील, ४ घंटे में १४ मील और ६ घंटे में २१ मील जायगा। यहाँ समय को जितने से गुणा करते हैं, दूरी भी उतने से ही गुणित होती है। अर्थात् जिस अनुपात में समय बढ़ता (या घटता) है, उसी अनुपात में दूरी भी बढ़ती (या घटती) है।

जैसे

२ घंटा : ६ घंटा : : ७ मील : २१ मील

इस उदाहरण में समय तथा दूरी में जो सम्बन्ध है उसे अनुक्रमानुपात या अनुलोमानुपात कहते हैं। इस प्रकार अनुक्रमानुपात वह सरल समानुपात है जिसमें सम्मिलित दोनों अनुपात समान रूप से बढ़ते या घटते हैं। अर्थात् जब एक अनुपात में राशि बढ़ती है या घटती है तो दूसरे में भी राशि बढ़ती या घटती है।

अनुक्रमानुपात के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं :—

(क) वस्तुओं की संख्या तथा उनका मूल्य

(ख) समय तथा दूरी

(ग) दूरी तथा रेल का किराया

(घ) वृत्त का व्यास तथा उसकी परिधि

(च) समय तथा मजदूरी

किन्हीं दो राशियों के बीच अनुक्रमानुपात है या नहीं यह आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण १- १२० आमों का दाम १४ रुपया है, तो ८४० आमों का दाम निकालो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया ८४० आमों का दाम य रुपया है, आमों की संख्या तथा उनके दाम में अनुक्रमानुपात है।

∴ १२० आम : ८४० आम : : १४ रु० : य रु०

∴ १२० य = ८४० × १४

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{\text{८४०} \times \text{१४}}{\text{१२०}} = \text{९८ रुपया}$$

नोट—यह प्रश्न ऐकिक नियम से भी हल करो।

उदाहरण २. यदि ४० मील का रेल भाड़ा १ रु० ८० पै० है तो ६ रु० ३० पै० में कितने मील रेल से जा सकते हैं ?

मान लिया य मील का भाड़ा ६ रु० ३० पै० है।

$$\therefore \quad \frac{\text{य मी०}}{\text{४० मी०}} = \frac{\text{६ रु० ३० पै०}}{\text{१ रु० ८० पै०}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{य}}{\text{४०}} = \frac{\text{६३०}}{\text{१८०}}$$

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{\text{६३०} \times \text{४०}}{\text{१८०}}$$

$$= \text{१४० मील}$$

प्रश्नावली १ (ग)

१. यदि ४ मी० २५ सेमी० कपड़े का मूल्य १२ रु० ७५ पै० है, तो २० मी० ५० सेमी० कपड़े का दाम बताओ ?

२. एक मजदूर ३$\frac{\text{३}}{\text{४}}$ घंटे में २० रु० मजदूरी पाता है, तो १२५ रु० पाने के लिए कितने घंटे काम करना होगा ?

३. एक अनाथालय में जब १०२ अनाथ रहते हैं तो खर्च १५३ रु० प्रति मास है। तो २०० अनाथों के रहने पर क्या खर्च होगा ?

४. एक कार ३ लिटर पेट्रोल में ४० मील जाती है, तो १६० मील जाने में कितना पेट्रोल लगेगा ?

५. एक दिवालिये को १८५० रु० देना है और उसके पास १११० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

की पूंजी है। यदि एक आदमी का उसके यहाँ ७५० रु० पावना है, तो उसे दिवालिये से कितना मिलेगा ?

६. एक पम्प का पंखा एक मिनट में १४४० चक्कर करता है और उससे १ मिनट में १८०० गैलन पानी उठता है। यदि पंखा १ मिनट में १६०० चक्कर करे, तो कितना पानी उठेगा ?

७. किसी पुस्तक के छापने का कुछ खर्च स्थिर रहता है तथा कुछ पुस्तकों की संख्या पर निर्भर करता है। यदि १००० पुस्तकों के छापने का व्यय १००० रु० है और १६०० पुस्तकों के छापने का व्यय १४५० रु० है तो २००० पुस्तकों के छापने का क्या व्यय होगा ?

८. कोई आदमी ५ मील की एक चढ़ाई ३ घंटे में तय करता है, तथा ६ मील का ढाल २ घंटे में तय करता है तो वापस आने में कितना समय लगेगा ?

९. एक आदमी १ रुपये पर ६ पैसा आय कर देता है। यदि आय कर देने के बाद उसके पास १४१० रु० बच जाता है, तो उसकी आमदनी क्या है ?

(२) व्युत्क्रमानुपात (Inverse Proportion)

कभी-कभी ऐसा होता है कि जब एक राशि बढ़ती है तो दूसरी राशि घटती है। अथवा उसका उलटा होता है। जैसे मान लिया ६ आदमी एक काम को १० दिन में कर सकते हैं,

तो १२	आदमी उसको		५	दिन में	कर लेंगे,
या २४	,,	,,	$2\frac{1}{2}$	,,	,,
या ३	,,	,,	२०	,,	,,

यहाँ यह देखा जाता है कि जब आदमियों की संख्या बढ़ाई जाती है तो दिनों की संख्या घटती है अथवा इसका उलटा होता है। अर्थात् जब एक राशि में किसी संख्या से गुणा करते हैं तो दूसरी में उसी संख्या से भाग दिया जाता है। ऐसे समानुपात को व्युत्क्रमानुपात कहते हैं।

(क) किसी कार की चाल तथा एक निश्चित दूरी तय करने का समय

(ख) खाद्य-सामग्री की मात्रा निश्चित रहने पर उसको खाने वालों की

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

संख्या तथा दिनों की संख्या ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है कि जब दो राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती हैं, तो हर दशा में उनके मानों का गुणनफल स्थिर होगा। जैसे, यहाँ पर हर बार आदमियों की संख्या तथा दिनों की संख्या का गुणनफल ६० है। अब मान लिया एक राशि का मान अ है तो दूसरी का मान स है तथा जब पहली का मान ब है तो दूसरी का मान द है। यदि दोनों राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती हैं, तो

$$अ \times स = ब \times द$$

$$\because \quad \frac{अ}{ब} = \frac{द}{स}$$

अब पहली राशि का अनुपात $\frac{अ}{ब}$ है तथा दूसरी का अनुपात $\frac{स}{द}$

अतः जब दो राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती हों, तो एक का अनुपात दूसरी के अनुपात के विलोम या व्युत्क्रम के बराबर होता है। यह नियम प्रश्नों को हल करने में सहायक होता है।

उदाहरण १. १५ आदमी एक काम को ३ दिन में कर सकते हैं तो ९ आदमी उसको कितने दिनों में करेंगे ?

१५ आदमी काम को ३ दिन में करते हैं।

मान लिया ९ „ „ य „

यहाँ आदमियों की संख्या तथा दिनों की संख्या में व्युत्क्रमानुपात है। अतः

$$\frac{१५}{९} = \frac{य}{३}$$

$$\therefore \quad ९य = १५ \times ३$$

$$\therefore \quad य = \frac{१५ \times ३}{९}$$

$$= ५ \text{ दिन}$$

उदाहरण २. एक फौज में १००० सैनिकों के लिये ५० दिन की रसद थी २० दिन बाद ४०० सैनिक लड़ाई में मारे गये। तो शेष सामान कितने दिन चलेगा ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२० दिन बाद ४०० सैनिक कम हो जाते हैं। अतः यह निकालना है कि १००० सैनिक जो रसद शेष ३० दिन में खाते वह रसद शेष ६०० सैनिक कितने दिन में खायेंगे।

मान लिया दिनों की संख्या य है।

अतः व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{१०००}{६००} = \frac{य}{३०}$$

$$\therefore \quad ६०० \, य = १००० \times ३०$$

$$\therefore \quad य = \frac{१००० \times ३०}{६००}$$

$$= ५० \text{ दिन}$$

अतः शेष सामान ५० दिन और चलेगा।

उदाहरण ३. यदि ३ पुरुष या ४ स्त्रियाँ एक खेत को ५६ घंटे में काट सकते हैं, तो ६ पुरुष और १६ स्त्रियाँ मिल कर उसको कितने समय में काटेंगे।

मान लिया ६ पुरुषों का काम य स्त्रियों के काम के बराबर है

अब प्रश्न में ३ " ४ " "

$$\therefore \quad ३ \text{ पु०} : ६ \text{ पु०} :: ४ \text{ स्त्री} : य \text{ स्त्री}$$

$$\therefore \quad ३ \, य = ६ \times ४$$

$$\therefore \quad य = \frac{६ \times ४}{३} = १२ \text{ स्त्री}$$

अतः ६ पु० तथा १६ स्त्री० का काम १२+१६=२८ स्त्रियों के काम के बराबर है।

अब मान लिया २८ स्त्रियाँ काम को र दिन में करती हैं।

∴ ४ स्त्रियाँ काम को ५६ दिन में करती हैं।

अतः व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{४ \text{ स्त्री}}{२८ \text{ स्त्री}} = \frac{र \text{ दिन}}{५६ \text{ दिन}}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

या $\frac{४}{२८} = \frac{र}{५६}$

$\therefore २८ र = ४ \times ५६,$

$\therefore \quad र = \frac{४ \times ५६}{२८} = ८$ दिन (उत्तर)

प्रश्नावली १ (घ)

१. कुछ धन को अनाथों में बराबर बराबर बाँटना है। यदि अनाथों की संख्या १३० है तो प्रत्येक को ८ रुपया मिलता है। यदि अनाथों की संख्या ३० बढ़ जाती है तो प्रत्येक को कितना मिलेगा।

२. इलाहाबाद से एक मोटर साइकिल ५० मील प्रति घंटा की चाल से वाराणसी १ घंटा ३० मि० में पहुँचती है। लौटते समय मशीन में कुछ खराबी आ जाने के कारण ४५ मिनट अधिक समय लगा है, तो लौटते समय चाल क्या थी।

३. एक व्यापारी कुछ रुपये से आम खरीदता है। यदि आम १२ रु० सैकड़ा मिलता है तो वह १५६० आम खरीदता है। यदि आम १५ रु० सैकड़ा मिलता है तो वह कितने आम खरीद सकता है।

४. एक दीवार को ४० आदमी २० दिन में बना सकते हैं। यदि ८ दिन काम करके १० आदमी चले गये, तो बाकी आदमी शेष दीवार को कितने दिनों में पूरा करेंगे।

५. एक किले में ८०० सिपाहियों के लिए ७५ दिन का खाना था। २० दिन के बाद ३०० सिपाही और आ गये। तो शेष खाना अब कितने दिन तक चलेगा।

६. एक बेईमान बनिया जब कुछ गल्ला बेचता है तो उसका वजन २·८५ क्विंटल आता है। किन्तु उसका एक किलो का बाट ९५० ग्राम के ही बराबर है। तो बताओ गल्ले का सही वजन क्या है।

७. एक मशीन में दो पुली लगी हैं, जो पट्टे से सम्बन्धित हैं। पहली पुली का व्यास ८ इंच है और वह एक मिनट में ९६० चक्कर करती है। यदि दूसरी

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पुली का व्यास २४ इंच है तो वह एक मिनट में कितने चक्कर करेगी।

८. एक इंजन के अगले पहिये का व्यास ३ फीट है तथा पिछले पहिये का व्यास २ फीट ३ इंच है। एक मील चलने में अगला पहिया १५०० चक्कर करता है, तो पिछला पहिया कितने चक्कर करेगा।

९. ४ पुरुष या ६ स्त्रियाँ या ८ बच्चे एक काम को ४० दिन में करते हैं। तो ३ पुरुष १५ स्त्रियाँ तथा ४ बच्चे उस काम को कितने दिनों में करेंगे।

१०. यदि तापमान स्थिर हो तो हवा की एक दी हुई मात्रा के आयतन तथा दबाव व्युत्क्रमानुपाती हैं। जब आयतन १००० घन सेमी० है तो दबाव ७५ किलोग्राम है, यदि दबाव ९० किलोग्राम हो जाता है तो आयतन बताओ।

११. ५ आदमी उतना काम करते हैं जितना ४ औरतें तथा ३ बच्चे या ३ आदमी तथा ५ बच्चे। यदि किसी काम को ६० आदमी १८ दिन में करते हैं तो उसको ८ आदमी, १६ औरतें तथा ३२ बच्चे कितने दिनों में करेंगे।

मिश्र समानुपात (Compound Proportion)

सरल समानुपात में केवल दो ही राशियाँ शामिल होती हैं, किन्तु मिश्र समानुपात में दो से अधिक राशियाँ रहती हैं।

जैसे १५ आदमी एक काम को १८ दिन में कर सकते हैं, तो २० आदमी उसको कितने दिनों में कर सकते हैं।

यहाँ आदमी और दिन दो ही राशियाँ प्रश्न में आती हैं अतः यह सरल समानुपात का प्रश्न है।

अब दूसरा प्रश्न लीजिए : १५ आदमी ८ घंटा प्रति दिन काम करके एक काम को १८ दिन में पूरा कर सकते हैं, तो कितने आदमी ६ घंटा प्रति दिन काम करके उसको २० दिन में कर सकते हैं।

यहाँ आदमी, घंटा तथा दिन तीन राशियाँ प्रश्न में आती हैं। अतः यह मिश्र समानुपात का प्रश्न है।

मिश्र समानुपात के प्रश्नों में कई सरल समानुपात शामिल रहते हैं, जो अनुक्रमानुपात या व्युत्क्रमानुपात हो सकते हैं। अतः मिश्र समानुपात

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

के प्रश्नों को विभिन्न समानुपातों को क्रम से लेकर हल किया जा सकता है।

उदाहरण १. १५ आदमी ८ घंटा प्रति दिन काम करके एक काम को १८ दिन में कर सकते हैं, तो कितने आदमी ६ घंटा प्रति दिन काम करके उसको १५ दिन में कर सकते हैं।

(१) पहले दिनों की संख्या १८ रखो।

जब ८ घंटा प्रति दिन काम होता है तो १५ आदमी लगते हैं

∵ माना ६ " " य " "

∴ व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{८}{६} = \frac{य}{१५}$$

$$\therefore ६य = ८ \times १५$$

$$\therefore य = \frac{८ \times १५}{६} = २० \text{ आदमी} \qquad ...(१)$$

(२) अब काम का समय ६ घंटा रखो।

जब काम १८ दिन में होता है तो २० आदमी लगते हैं।

माना १२ " " र " "

∴ व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{१८}{१२} = \frac{र}{२०}$$

$$\therefore १२र = र १८ \times २०$$

$$\therefore र = \frac{१८ \times २०}{१२} \qquad ...(२)$$

$$= ३० \text{ आदमी (उत्तर)}$$

उदाहरण २. ४५ आदमी ८ घंटा प्रतिदिन काम करके १५० मीटर लम्बी खाईं १६ दिन में खोद सकते हैं, तो ६० आदमी ६ घंटा प्रतिदिन काम करके २२५ मीटर लम्बी खाईं कितने दिनों में तैयार करेंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१) ४५ आदमियों के ८ घंटा प्रतिदिन काम करने से,
१५० मीटर खाईं १६ दिन में खोदी जा सकती है।
माना २२५ मीटर खाईं य दिन में खोदी जा सकती है।

∴ अनुक्रमानुपात से

$$\frac{१५०}{२२५}=\frac{१६}{य}$$

$$\therefore \quad य = \frac{२२५ \times १६}{१५०} = २४ \text{ दिन} \qquad \ldots(१)$$

(२) ४५ आदमी २२५ मीटर खाईं
८ घंटा प्रतिदिन काम करके २४ दिन में खोद सकते हैं।
माना ६ घंटा प्रतिदिन काम करके र दिन में काम समाप्त होता।

∴ व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{८}{६} = \frac{र}{२४}$$

$$\therefore \quad ६र = ८ \times २४$$

$$\therefore \quad र = \frac{८ \times २४}{६} = ३२ \text{ दिन} \qquad \ldots(२)$$

(३) २२५ मीटर खाईं ६ घंटा प्रतिदिन काम करके
४५ आदमी ३२ दिन में खोद सकते हैं।
माना ६० आदमी काम को ल दिन में कर सकते हैं।

∴ व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{४५०}{६०} = \frac{ल}{३२}$$

$$\therefore \quad ६०ल = ४५ \times ३२$$

$$\therefore \quad ल = \frac{४५ \times ३२}{६०} = २४ \qquad \ldots(३)$$

$$= २४ \text{ दिन (उत्तर)}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मिश्र समानुपात के प्रश्नों को हल करने की सरल विधि :—

इस विधि को समझने के लिये उपरोक्त उदाहरण २ पर विचार कीजिये।

यहाँ अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{\text{४५}}{\text{६०}} \times \text{२३}$ (३) से

$= \frac{\text{४५}}{\text{६०}} \times \frac{\text{८}}{\text{६}} \times \text{२४}$ (२) से

$= \frac{\text{४५}}{\text{६०}} \times \frac{\text{८}}{\text{६}} \times \frac{\text{२२५}}{\text{१५०}} \times \text{१६}$ (१) से

इस मान को निम्न प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं।

प्रश्न में विभिन्न राशियों का विवरण इस प्रकार है।

आदमी	४५	: ६०	(व्युत्क्रमानुपात)
घंटा	८	: ६	(व्युत्क्रमानुपात)
मीटर	१५०	: २२५	(अनुक्रमानुपात)
दिन	१६	: ल	(अभीष्ट राशि)

अब अभीष्ट राशि ल का मान निम्नलिखित नियम से निकल आता है :—

(१) यदि किसी राशि का अभीष्ट राशि के साथ व्युत्क्रमानुपात है तो उसका पहला पद अंश में तथा दूसरा पद हर में लिखिये।

(२) यदि किसी राशि का अभीष्ट राशि के साथ अनुक्रमानुपात है तो उसका पहला पद हर में तथा दूसरा पद अंश में लिखिये।

(३) उपरोक्त भिन्नों के गुणनफल को अभीष्ट राशि के ज्ञात मान से गुणा कर दीजिये।

अभीष्ट राशि ल $= \frac{\text{४५}}{\text{६०}} \times \frac{\text{८}}{\text{६}} \times \frac{\text{२२५}}{\text{१५०}} \times \text{१६}$

= २४ दिन

उदाहरण ३. ७२ आदमी ३२४ मीटर लम्बी, १२ मीटर चौड़ी तथा ८ मीटर गहरी खाइँ १२ घंटे प्रतिदिन काम करके ९ दिन में खोद सकते हैं तो कितने आदमी १४५८ मी० लम्बी, १६ मी० चौड़ी तथा ३ मी० गहरी खाइँ ९ घंटा प्रति दिन काम करके ३६ दिन में खोद सकते हैं।

लम्बाई मीटर	३२४	: १४५८	(अनु०)
चौड़ाई मी०	१२	: १६	(अनु०)
गहराई मी०	८	: ३	(अनु०)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

घंटा	१२ : ९	(व्युत्क्र०)
दिन	९ : ३६	(व्युत्क्र०)
आदमी	७२ : य	अभीष्ट राशि

अभीष्ट राशी य $= \frac{१४५८}{१२१५} \times \frac{१६}{१५} \times \frac{३}{८} \times \frac{१५}{९} \times \frac{९}{३६} \times ७२$

$=$ ५४ आदमी (उत्तर)

उदाहरण ४. एक सेना में जब ६५० सैनिक रहते हैं तो उनके लिये ५ मास की रसद पहुँचाने में १२० आदमियों को ५ दिन लगता है तो जब १३० सैनिक कम हो जाते हैं तो उनके लिये ४ मास की रसद ३ दिन में पहुँचाने के लिये कितने आदमी चाहिये।

सैनिक	६५०	:	५२०	(अनु०)
मास	५	:	४	(अनु०)
दिन	५	:	३	(व्युत०)
आदमी	१२०	:	य	अभीष्ट राशि

आदमियों की अभीष्ट संख्या $= \frac{५२०}{६५०} \times \frac{४}{५} \times \frac{५}{३} \times १२०$

$=$ १२८ आदमी (उत्तर)

उदाहरण ५. ५ आदमी और ८ लड़के एक काम को १० दिन में कर सकते हैं और ७ आदमी ९ लड़के ८ दिन में। तो १० आदमी ४ लड़के कितने दिनों में कर सकते हैं?

५ आदमी तथा ८ लड़के १० दिन में करते हैं

∴ ५० आदमी तथा ८० लड़के १ दिन में करते हैं।

इसी प्रकार ७ आदमी तथा ९ लड़के ८ दिन में

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ ५६ आदमी तथा ७२ लड़के १ दिन में

∴ ५० आदमी तथा ८० लड़कों का काम=५६ आदमी तथा ७२ लड़कों के काम के

∴ ८ लड़कों का काम =६ आदमियों के काम के

∴ ५ आदमी ८ लड़के =५+६ =११ आदमी

∴ १० आदमी ४ लड़के=१०+३=१३ आदमी

अब ११ आदमी काम को १० दिन में कर सकते हैं

१३ „ „ य „

∴ व्युत्क्रमानुपात से

$$\frac{११}{१३}=\frac{य}{१०}$$

$$\therefore १३य=११\times१०$$

$$\therefore य=\frac{११\times१०}{१३}$$

$$=\frac{११०}{१३}=८\frac{६}{१३}$$ दिन (उत्तर)

प्रश्नावली १ (च)

१. एक आदमी प्रतिदिन ८ घंटा चलकर १२० मील ५ दिन में जाता है तो प्रतिदिन १० घंटा चलकर २०० मील कितने दिनों में जायेगा ?

२. २५ आदमी १०लम्बी सड़क ७० दिन में बनाते हैं। यदि १० दिन काम करने के बाद ५ आदमी बीमार पड़ गये तो शेष सड़क कितने दिनों में पूरी होगी ?

३. ६ व्यक्तियों के एक परिवार का ८ दिन का खर्च ८० रुपया है तो १२ व्यक्तियों के परिवार का १०० रुपये में कितने दिन खर्च चलेगा ?

४. ५० आदमी ६ घण्टे प्रतिदिन काम करके एक काम को १६ दिन में पूरा करते हैं तो ८० आदमी कितने घण्टे प्रतिदिन काम करके उससे तिगुना काम ४० दिन में पूरा कर लेंगे ?

५. यदि १५० मजदूर २०० मीटर लम्बा, ५ मीटर चौड़ा तथा ८ मीटर ऊँचा बाँध १० घण्टा प्रतिदिन काम करके २० दिन में बनाते हैं तो बताओ २००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मजदूर ६०० मीटर लम्बा, ८ मीटर चौड़ा तथा ६ मीटर ऊँचा बाँध ९ घण्टा प्रतिदिन काम करके कितने दिनों में बना लेंगे।

६. बिजली के ४० वाट के ८ वल्व ६ घण्टा प्रतिदिन जलाने पर ३० दिन का खर्च २० है तो ६० वाट के ३ तथा २५ वाट के १२ वल्वों का ७$\frac{१}{२}$ घण्टा प्रतिदिन जलाने पर २५ दिन का खर्च बताओ।

७. एक ठेकेदार ने ५ किलोमीटर सड़क १५० दिन में बनाने का ठेका लिया। उसने १०० आदमी काम पर लगा दिये, परन्तु ६० दिन में केवल १$\frac{३}{२}$ किलो मीटर सड़क बन पाई। अब वह कितने आदमी काम पर बढ़ा दे कि काम निश्चित समय से १० दिन पहले ही पूरा हो जाय।

८. २ आदमी तथा ३ लड़के एक काम को ५ दिन में करते हैं और ३ आदमी तथा २ लड़के उसको ४ दिन में करते हैं तो ५ आदमी उसी काम को कितने दिन में करेंगे।

९. एक काम को ३ आदमी और ४ लड़के ६ दिन में कर सकते हैं, ३ आदमी और १ लड़का ८ दिन में तथा ४ औरतें और ८ लड़के ५ दिन में। बताओ एक औरत अकेले उस काम को कितने दिनों में कर सकते हैं?

१०. एक काम पर ४ आदमी और ५ लड़के लगाये जाते हैं जो ६ दिन में आधा काम कर लेते हैं। इसके बाद १ आदमी तथा २ लड़के और लगा दिये जाते हैं और ३ दिन में $\frac{१}{३}$ काम और हो जाता है; तो कितने आदमी और लगा दिये जांय कि शेष काम १ दिन में समाप्त हो जाय?

११. दो दांतेदार पहिये जिनमें १२ तथा १६ दांते हैं, एक दूसरे से रगड़ कर चलते हैं। यदि दूसरा पहिया ३० सेकण्ड में ६० चक्कर करता है, तो पहला पहिया ६ सेकण्ड में कितने चक्कर करेगा?

१२. १५ गाय तथा ८ बकरियों का मूल्य ५३०० रुपया है और १२ गाय तथा १३ बकरियों का मूल्य ४९०० रुपया है, तो एक गाय और एक बकरी का अलग-अलग क्या मूल्य है।

१३. ३ आदमी ५ स्त्रियों के बराबर और २ स्त्रियाँ ३ लड़कों के बराबर काम करती हैं। १३ आदमियों का ६ दिन का ८ स्त्रियों का ५ दिन का और

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५ लड़कों का ४ दिन का वेतन ६८७'५ रु० है, तो एक आदमी एक स्त्री और एक लड़के की प्रति दिन की मजदूरी ज्ञात करो।

१४. एक किले में १२०० आदमियों के लिये १८ छटांक प्रति व्यक्ति प्रति दिन के हिसाब से ४२ दिन के लिये खाने का सामान था। यदि ६०० आदमी और आ जांय, तो प्रति व्यक्ति को कितना खाना प्रतिदिन दिया जाय कि सामान ५४ दिन तक काम आ सके।

१५. एक पुस्तक में ३०० पृष्ठ हैं, हर पृष्ठ पर ४० लाइनें हैं तथा हर लाइन मे ५४ अक्षर हैं, तो उसके दूसरे संस्करण में कितने पृष्ठ होंगे। यदि उसमें हर पृष्ठ पर ५० लाइनें हैं तथा हर लाइन में ३६ अक्षर हैं।

१६. ३ आदमी, ४ स्त्रियाँ तथा ५ लड़के प्रति दिन १० घंटा काम कर के १२० मी० लम्बी, ५० मी० चौड़ी, तथा २ मी० गहरी खाईं को ६० दिन में खोद सकते हैं तो ७ आदमी, ६ स्त्रियाँ तथा ११ लड़के १५० मी० लम्बी ४० मी० चोड़ी तथा ३ मी० गहरी खोई की ८ घंटा प्रति दिन काम करके कितने दिनों में खोदेंगे जबकि एक आदमी, एक स्त्री तथा एक लड़के के काम में ३ : २ : १ का अनुपात है।

समानुपाती भाग (Proportional Parts)

परिभाषा : किसी संख्या अथवा राशि को दिये हुये अनुपात में विभक्त करने की क्रिया को उसका **समानुपाति विभाजन** (Proportional Division) कहते है और इस प्रकार से प्राप्त भागों को उस राशि या संख्या के समानुपाति भाग (Proportional Parts) कहते हैं।

मान लो १२० रु० को राम तथा मोहन में ७ : ८ के अनुपात में बाँटना है। इसका यह अर्थ है कि जब राम को ७ रु० मिलता है तो मोहन को ८ रु०। इस प्रकार यदि (७+८) १५ रु० है तो राम को ७ रु० तथा मोहन को ८ रु० मिलेगा। किन्तु कुल १२० रु० है जो १५ रु० का आठ गुना है। अतः राम को ७ रु० का ८ गुना अर्थात ५६ रुपया तथा मोहन को ८ रु० का आठ गुना अर्थात ६४ रु० मिलेगा यह ५६ रु० तथा ६४ रु० राम तथा मोहन के समानुपाती भाग हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

एक अन्य उदाहरण में मान लो ८१ को २ : ३ : ४ के अनुपात में विभक्त करना है। यहाँ २+३+४=९

इस प्रकार पहला भाग कुल का $\frac{२}{९}$ अर्थात ८१ × $\frac{२}{९}$=१८

दूसरा भाग कुल का $\frac{३}{९}$ अर्थात ८१ × $\frac{३}{९}$=२७

तीसरा भाग कुल का $\frac{४}{९}$ अर्थात ८१ × $\frac{४}{९}$=३६

इसी प्रकार मान लो किसी राशि र को अ : ब : स के अनुपात में विभक्त करना है। यहाँ अनुपात के पदों का योग=अ+ब+स। अतः

पहला भाग $\frac{अ}{अ+ब+स}$ र दूसरा भाग $\frac{ब}{अ+ब+स}$ र

तथा तीसरा भाग $\frac{स}{अ+ब+स}$ र हैं।

उदाहरण 1. ७२० रुपये को ४ : ५: ६ के अनुपात में बाँटों

यहाँ अनुपात के पदों का योग=४+५+६=१५

अतः पहला भाग=$\frac{४}{१५}$×७२०=१९२ रु०

दूसरा भाग=७२० का $\frac{५}{१५}$=२४० रु०

तीसरा भाग=७२० का $\frac{६}{१५}$ =२८८ रु० (उत्तर)

उदाहरण २. १८५ को $\frac{१}{४}$: $\frac{१}{५}$: $\frac{१}{६}$ के अनुपात में बाँटो।

$\frac{१}{४}$; $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$ मे प्रत्येक को उनके हर के लघुत्तम समापवर्त्य ६० से गुणा करने पर १५, १२,१० मिले

अतः अनुपात $\frac{१}{४}$: $\frac{१}{५}$: $\frac{१}{६}$ अनुपात १५ : १२ : १० के बराबर है।

∴ अनुपात के पदों का योग =१५+१२+१०=३७

∴ प्रथम भाग =१८५ का $\frac{१५}{३७}$=७५

∴ द्वितीय भाग=१८५ का $\frac{१२}{३७}$=६०

∴ तृतीय भाग=१८५ का $\frac{१०}{३७}$=५० (उत्तर)

उदाहरण ३. कुछ रुपया क तथा ख में बांटा जाता है तथा क का भाग ख के भाग का $\frac{३}{५}$ है। यदि ४५ रुपया मिला तो कुल कितना रुपया था।

क तथा ख के भागों में अनुपात=$\frac{३}{५}$: १ अर्थात ३ : ५

अनुपात के पदों का योग=३+५=८

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लो कुल रु० य हैं।

$\therefore$ क का भाग = य का $\frac{३}{८} = \frac{३ य}{८} = ४५$

$\therefore$ ३ य = ४५ × ८

$\therefore$ य $= \frac{४५ \times ८}{३} =$ १२० रु० (उत्तर)

उदाहरण ४. १५० रु० को क, ख, ग, घ में इस प्रकार बाँटों कि क तथा ख को २ : ३, ख तथा य को ४ : ५ और ग तथा घ को ६ : ७ के अनुपात में मिले।

जब क को २ रु० मिलता है तो ख को ३ रु०

जब ख को ४ रु० मिलता है तो ग को ५ रु०

$\therefore$,, ,, ३ रु० ,, ,, $\frac{३}{४}$ का ५ = $\frac{१५}{४}$ रु०

जब ग को ६ रु० मिलता है तब घ को ७ रु० मिलता है।

$\therefore$ $\frac{१५}{४}$,, ,, $\frac{१५}{४ \times ६}$ का ७ = $\frac{३५}{८}$

$\therefore$ क, ख, ग, तथा घ के भागों का अनुपात

२ : ३ : $\frac{१५}{४}$: $\frac{३५}{८}$

अर्थात १६ : २४ : ३० : ३५

अनुपात के पदों का योग = १६ + २४ + ३० + ३५ = १०५

$\therefore$ क का भाग = १०५० का $\frac{१६}{१०५}$ = १६० रु०

$\therefore$ ख ,, = १०५० का $\frac{२४}{१०५}$ = २४० रु०

$\therefore$ ग ,, = १०५० का $\frac{३०}{१०५}$ = ३०० रु०

$\therefore$ घ ,, = १०५० का $\frac{३५}{१०५}$ = ३५० रु० (उत्तर)

उदाहरण ५. एक थैले में १ रुपया, ५० पैसे तथा १० पैसे के सिक्के ३ : ४ : ५ के अनुपात में हैं। यदि थैले में कुल २२० रुपये हैं तो प्रत्येक सिक्कों की संख्या बताओ।

यदि ३ रुपये हैं तो ४ पचास पैसे के सिक्के तथा ५ दस पैसे के सिक्के हैं।
इन सबका मूल्य = ३ रु० + २ रु० + ५० पैसा

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

एक अन्य उदाहरण में मान लो ८१ को २ : ३ : ४ के अनुपात में विभक्त करना है। यहाँ २+३+४=९

इस प्रकार पहला भाग कुल का $\frac{२}{९}$ अर्थात ८१ × $\frac{२}{९}$=१८

दूसरा भाग कुल का $\frac{३}{९}$ अर्थात ८१ × $\frac{३}{९}$=२७

तीसरा भाग कुल का $\frac{४}{९}$ अर्थात ८१ × $\frac{४}{९}$=३६

इसी प्रकार मान लो किसी राशि र को अ : ब : स के अनुपात में विभक्त करना है। यहाँ अनुपात के पदों का योग=अ+ब+स। अतः

पहला भाग $\frac{अ}{अ+ब+स}$ र दूसरा भाग $\frac{ब}{अ+ब+स}$ र

तथा तीसरा भाग $\frac{स}{अ+ब+स}$ र हैं।

उदाहरण १. ७२० रुपये को ४ : ५: ६ के अनुपात में बाँटों

यहाँ अनुपात के पदों का योग=४+५+६=१५

अतः पहला भाग=$\frac{४}{१५}$×७२०=१९२ रु०

दूसरा भाग=७२० का $\frac{५}{१५}$=२४० रु०

तीसरा भाग=७२० का $\frac{६}{१५}$ =२८८ रु० (उत्तर)

उदाहरण २. १८५ को $\frac{१}{४}$: $\frac{१}{५}$: $\frac{१}{६}$ के अनुपात में बाँटो।

$\frac{१}{४}$; $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$ मे प्रत्येक को उनके हर के लघुत्तम समापवर्त्य ६० से गुणा करने पर १५, १२,१० मिले

अतः अनुपात $\frac{१}{४}$: $\frac{१}{५}$: $\frac{१}{६}$ अनुपात १५ : १२ : १० के बराबर है।

∴ अनुपात के पदों का योग =१५+१२+१०=३७

∴ प्रथम भाग =१८५ का $\frac{१५}{३७}$=७५

∴ द्वितीय भाग=१८५ का $\frac{१२}{३७}$=६०

∴ तृतीय भाग=१८५ का $\frac{१०}{३७}$=५० (उत्तर)

उदाहरण ३. कुछ रुपया क तथा ख में बांटा जाता है तथा क का भाग ख के भाग का $\frac{३}{५}$ है। यदि ४५ रुपया मिला तो कुल कितना रुपया था।

क तथा ख के भागों में अनुपात=$\frac{३}{५}$: १ अर्थात ३ : ५

अनुपात के पदों का योग=३+५=८

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लो कुल रु० य हैं।

$\therefore$ क का भाग = य का $\frac{३}{८} = \frac{३ य}{८} = ४५$

$\therefore$ ३ य = ४५ × ८

$\therefore$ य = $\frac{४५ \times ८}{३}$ = १२० रु० (उत्तर)

उदाहरण ४. १५० रु० को क, ख, ग, घ में इस प्रकार बाँटों कि क तथा ख को २ : ३, ख तथा ग को ४ : ५ और ग तथा घ को ६ : ७ के अनुपात में मिले।

जब क को २ रु० मिलता है तो ख को ३ रु०

जब ख को ४ रु० मिलता है तो ग को ५ रु०

$\therefore$ „ „ ३ रु० „ „ $\frac{३}{४}$ का ५ = $\frac{१५}{४}$ रु०

जब ग को ६ रु० मिलता है तब घ को ७ रु० मिलता है।

$\therefore$ $\frac{१५}{४}$ „ „ $\frac{१५}{४ \times ६}$ का ७ = $\frac{३५}{८}$

$\therefore$ क, ख, ग, तथा घ के भागों का अनुपात

२ : ३ : $\frac{१५}{४}$: $\frac{३५}{८}$

अर्थात १६ : २४ : ३० : ३५

अनुपात के पदों का योग = १६ + २४ + ३० + ३५ = १०५

$\therefore$ क का भाग = १०५० का $\frac{१६}{१०५}$ = १६० रु०

$\therefore$ ख „ = १०५० का $\frac{२४}{१०५}$ = २४० रु०

$\therefore$ ग „ = १०५० का $\frac{३०}{१०५}$ = ३०० रु०

$\therefore$ घ „ = १०५० का $\frac{३५}{१०५}$ = ३५० रु० (उत्तर)

उदाहरण ५. एक थैले में १ रुपया, ५० पैसे तथा १० पैसे के सिक्के ३ : ४ : ५ के अनुपात में हैं। यदि थैले में कुल २२० रुपये हैं तो प्रत्येक सिक्कों की संख्या बताओ।

यदि ३ रुपये हैं तो ४ पचास पैसे के सिक्के तथा ५ दस पैसे के सिक्के हैं।

इन सबका मूल्य = ३ रु० + २ रु० + ५० पैसा

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ८. ४७ रु० को राम, सोहन तथा मोहन में इस प्रकार बांटो कि यदि इनमें से प्रत्येक १ रु० दान कर देता है तो उनके पास ५ : ८ : ९ के अनुपात में रु० हैं।

कुल दान=३ रु०

∴ ४७—३ =४४ रु० को ५ : ८ : ९ के अनुपात में बाँटों

पहला भाग=४४ का $\frac{५}{२२}$=१० रु०

दूसरा „ =४४ का $\frac{८}{२२}$=१६ रु०

तीसरा „ =४४ का $\frac{९}{२२}$=१८ रु०

∴ राम को ११ रु०, सोंहन को १७ रु०, तथा मोहन को १९ रु० मिला। (उत्तर)

उदाहरण ९. एक कारखाने में आदमी, स्त्री, और बालक १ : २ : ३ के अनुपात में काम पर लगाये जाते हैं। एक आदमी एक स्त्री तथा एक बालक की मजदूरी में ६ : ३ : २ का अनुपात है। जब आदमियों की संख्या ५० है तो सभी काम करने वालों की कुल मजदूरी ४५० रु० है तो एक आदमी, एक स्त्री, तथा एक बालक की मजदूरी बताओ।

आदमी, स्त्री, तथा बालक की संख्या में १ : २ : ३ का अनुपात है।

∵ आदमियों की संख्या=५० है

∴ स्त्रियों „ „ =५०×२=१००

∴ बालकों „ „ =५०×३=१५०

मान लो एक आदमी का वेतन ६ य रु० है। प्रश्न के अनुसार एक स्त्री का वेतन ३ य रु० तथा एक बालक का वेतन २ य रु०

∴ कुल वेतन=५०×६य+१००×३य+१५०×२य

=९०० य=४५०

∴ य=$\frac{४५०}{९००}$=$\frac{१}{२}$ रु०

∴ एक आदमी का वेतन=६×$\frac{१}{२}$=३ रु०

„ स्त्री „ =३×$\frac{१}{२}$=१·५ रु०

„ बालक „ =२×$\frac{१}{२}$=१ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १ (छ)

१. एक आदमी के पास १५० रु० है। जिसको वह अपने दो लड़कों में २ : ३ के अनुपात में बाँटता है तो प्रत्येक लड़के को कितना मिला ?

२. २२·३२ रु० को क, ख, ग, घ में इस प्रकार बाँटों कि उनके भाग ३, ४, ५, ६ के समानुपाती हों।

३. तीन संख्याओं का योग २३५ है और उनमें ११ : १७ : १९ का अनुपात है। उन संख्याओं को बताओ।

४. १२५ मीटर को $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{७}$ के समानुपात में बांटो।

५. ८ पौ० १७ सि० को $१\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, २·५ के समानुपात में बाँटो।

६. कुछ धन क और ख में बांटा जाता है। क का भाग ख के भाग का $१\frac{७}{९}$ है। यदि क को ख से ७० रु० अधिक मिला तो कुल धन बताओ।

७. ५१० रु० क, ख, ग में इस प्रकार बाँटो कि क को ख से तिगुना तथा ख को ग से चौगुना मिले।

८. १०२७ रु० को क, ख, ग, घ में इस प्रकार बांटो कि क तथा ख के भाग में ४ : ५ ख तथा ग के भाग में ६ : ७ और ग तथा घ के भाग में ८ : ९ का अनुपात हो।

९. २८२ रु० क, ख, ग, घ में इस प्रकार वांटा जाता है कि क तथा ख के भाग २ : ३ तथा ग और घ के भाग ४ : ५ के अनुपात में है और ख को ग के बराबर मिले। प्रत्येक का भाग बताओ।

१०. एक थैले में १० रु०, ५ रु० तथा २ रु० के नोट २ : ५ : ७ के अनुपात में हैं। यदि उसमें कुल २९५० रु० है तो हर प्रकार के नोटों की संख्या बताओ।

११. एक संदूक में एक रुपये, पचास पैसे, पच्चीस पैसे तथा दस पैसे के कुछ सिक्के रखे हैं तथा उनकी संख्याओं में २ : ३ : ७ : १४ का अनुपात है। यदि संदूक में कुल ९६० रुपये हैं, तो प्रत्येक सिक्के की संख्या ज्ञात करो।

१२. एक थैले में दस रुपये, पाँच रुपये तथा दो रुपये के २५५० नोट हैं। यदि उनके मूल्य समान हैं, तो हर प्रकार के नोटों की संख्या ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१३. एक थैले में एक रुपये, पच्चीस पैसे तथा दस पैसे के १२३० सिक्के रखें हैं। यदि उनके मूल्यों में ५ : ४ : २ का अनुपात है, तो हर प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात करो। और थैले में कितना धन है ?

१४. ६ पुरुषों, १५ स्त्रियाँ तथा ३० लड़कों ने मिलकर ६०० रु० कमाया। २ पुरुषों का काम ३ स्त्रियों के काम के बराबर है तथा ४ स्त्रियों का काम ५ लड़कों के काम के बराबर है। तो एक पुरुष, एक स्त्री तथा एक लड़के को कितना मिला ?

१५. अ, ब, स तीन मजदूर मिलकर ५२५ रु० कमाते हैं। अ ने १२ दिन, ब ने २० दिन तथा स ने २५ दिन काम किया। यदि उनकी प्रति दिन की मजदूरियों में ५ : २ : ३ का अनुपात है तो प्रत्येक को कितना मिला ?

१६. एक परीक्षा में पाँच विषय हैं और हर विषय में अधिकतम अंक १०० हैं। एक विद्यार्थी ने इन पाँचों विषयों में जो अंक प्राप्त किये उनका अनुपात २ : ३ : ४ : ५ : ६ है। उसने सभी विषयों में मिलाकर ६०% प्राप्त किये। यदि प्रथम श्रेणी के लिए ६०% अंक आवश्यक हैं, तो बताओ उसने कितने विषयों में प्रथम श्रेणी के अंक प्राप्त किये हैं ?

१७. ४९४ रु० को १०३ बच्चों में इस प्रकार बाँटा जाता है कि प्रत्येक लड़के को ४ रु० तथा प्रत्येक लड़की को ६ रु० मिले। तो लड़कों की संख्या ज्ञात करो।

१८. एक सेठ कुछ गरीबों को दान देता है। यदि प्रत्येक को २ रु० देता है तो उसके पास ३१ रु० बच जाता है और यदि प्रत्येक को २ रु० २५ पै० देता है, तो ३४ रु० कम पड़ जाता है। तो वह कितने गरीबों को दान देता है ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

2 साझा या सहभागिता (PARTNERSHIP)

जब दो या दो से अधिक व्यवसायी मिलकर कोई व्यवसाय करते हैं तो उसे साझा या सहभागिता कहते हैं और साझे में सम्मिलित व्यक्तियों को **साझेदार** (Partners) कहते हैं।

साझे के व्यवसाय के परिणाम स्वरूप जो लाभ या हानि होती है उसका बटवारा निम्नलिखित दो बातों पर निर्भर करता है।

१. साझीदारों द्वारा लगाई गई पूँजी।

२. जितने समय तक प्रत्येक साझीदार की पूँजी व्यवसाय में लगी रहती है।

इस प्रकार साझा दो प्रकार का होता है।

१. सरल साझा (Simple Partnership)

२. मिश्र साझा (Compound Partnership)

सरल साझे में साझीदारों द्वारा व्यवसाय में लगाई गई पूँजी समान समय तक रहती है। इसलिए लाभ या हानि का बटवारा पूँजी के अनुपात में होता है। उदाहरण के लिए किसी व्यापार में रामकुमार ५०० रु० लगाता है, श्यामकुमार १००० रुपया और शिवकुमार १५०० रु० लगाता है। और यदि व्यवसाय में १५० रु० लाभ होता है तो १५० रुपए को ५०० : १००० : १५०० अर्थात् १ : २ : ३ के अनुपात में बाँट लेंगे। इस प्रकार

रामकुमार को $१५० \times \frac{१}{६} = २५$ रु० मिलेगा।

श्यामकुमार का $१५० \times \frac{२}{६} = ५०$ रु० मिलेगा।

शिवकुमार को $१५० \times \frac{३}{६} = ७५$ रु० मिलेगा।

मिश्र साझे में साझेदारों की पूंजी भिन्न-भिन्न समय तक लगी रहती है। इसलिए लाभ या हानि के बटवारे में पूँजी और समय दोनों पर विचार करना पड़ता है। जैसे रामलाल, मेवालाल और श्यामलाल मिलकर कपड़े की एक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

दुकान खोलते हैं। रामलाल उसमें ८०० रु० ५ मास तक, मेवालाल ५०० रु० १२ मास तक और श्यामलाल १००० रु० ८ मास तक लगाता है। और साल के अन्त में ९०० रु० लाभ होता है। इस लाभ का बटवारा उनकी पूँजी तथा समय के अनुसार होगा।

रामलाल के ८०० रु० पर ५ मास में जो लाभ होगा उतना ही लाभ उसे एक महीने तक ८००×५=४००० रु० पर होगा।

मेवालाल के ५०० रु० पर १२ मास में वही लाभ होगा जो एक मास में ५००×१२=६००० रु० पर होगा।

श्यामलाल के १००० रु० पर ८ मास में वही लाभ होगा जो एक मास में १०००×८=८००० रु० पर होगा। इसलिए ९०० रु० के लाभ पर बटवारा उनमें ४००० : ६००० : ८००० अर्थात् २ : ३ : ४ के अनुपात में होगा।

इस प्रकार रामलाल का लाभ $=\frac{२}{९}\times ९०० = २००$ रु०

मेवालाल का लाभ $=\frac{३}{९}\times ९०० = ३००$ रु०

श्यामलाल का लाभ $=\frac{४}{९}\times ९०० = ४००$ रु०

साझेदारों के भेद :

साझेदार दो प्रकार के होते है :

१. सक्रिय (Active)

२. शान्त (Sleeping)

सक्रिय साझेदार उसे कहते हैं जो पूँजी लगाने के अतिरिक्त अपना कुछ समय व्यवसाय के संचालन में लगाता है और शान्त साझेदार उसे कहते हैं जो केवल पूँजी लगाता और व्यवसाय के संचालन में समय नहीं देता है। सक्रिय साझेदार को व्यवसाय में समय देने के कारण लाभ का कुछ अंश मिलता है।

उदाहरण १. नरेन्द्र, सुरेन्द्र और महेन्द्र ने मिलकर दवा की एक दूकान खोली। नरेन्द्र ने ३००० रु०, महेन्द्र ने ५००० रु० और सुरेन्द्र ने ७००० रु० लगाये। यदि वर्ष के अन्त में १५०० रु० का लाभ हुआ तो प्रत्येक को क्या मिला?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इस प्रश्न में साझेदारों की पूंजी समान समय तक लगी हुई है। इसलिए लाभ का बँटवारा उनके द्वारा लगाई गई पूँजी के अनुपात अर्थात् ३००० : ५००० : ७००० या ३ : ५ : ७ के अनुपात में होगा।

अनुपाती राशियों का योग $= ३ + ५ + ७ = १५$

∴ नरेन्द्र का लाभ $= \frac{३}{१५} \times १५०० = ३००$ रु०

सुरेन्द्र का लाभ $= \frac{५}{१५} \times १५०० = ५००$ रु०

महेन्द्र का लाभ $= \frac{७}{१५} \times १५०० = ७००$ रु०

उदाहरण २. किसी व्यापार में क, ख और ग सम्मिलित हैं। क उसमें ५०० रु० ६ महीने तक, ख उसमें ९०० रु० ५ महीने तक और ग ३०० रु० १२ महीने तक लगाता है। इस व्यापार से उन्हें ७४० रु० का लाभ होता है तो प्रत्येक का लाभ बताओ।

क को ५०० रु० पर ६ महीने में वही लाभ होगा जो

१ महीने में $५०० \times ६ = ३०००$ रु० पर

ख को ९०० रु० पर ५ महीने में वही लाभ होगा जो

१ महीने में $९०० \times ५ = ४५००$ रु० पर

ग को ३०० रु० पर १२ महीने में वही लाभ होगा जो

१ महीने में $१२०० \times ३ = ३६००$ रु० पर

अतः लाभ का बँटवारा ३००० : ४५०० : ३६०० अर्थात् १०:१५ : १२ के अनुपात में होगा।

समानुपाती राशियों का योग $= १० + १५ + १२ = ३७$

∴ क का लाभ $= \frac{१०}{३७} \times ७४० = २००$ रु०

ख का लाभ $= \frac{१५}{३७} \times ७४० = ३००$ रु०

ग का लाभ $= \frac{१२}{३७} \times ७४० = २४०$ रु० उत्तर

उदाहरण ३. सिद्धू, बुद्धू और रामनाथ ने मिलकर एक चरागाह १५०० रु० वार्षिक में किराये पर लिया। यदि उस चरागाह में सिद्धू ४८ गायें १० मास तक, बुद्धू ४० गायें ६ मास तक और रामनाथ ६० गायें साल के अन्त तक चराता है तो प्रत्येक को कितना किराया देना पड़ता है ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सिद्धू को ४८ गायों के लिए १० मास में उतना ही किराया देना पड़ेगा जितना कि एक मास में ४८ × १० = ४८० गायों का। बुद्धू को ४० गायों के लिए ६ मास में उतना ही किराया देना पड़ेगा जितना कि १ मास में ४० × ६ = २४० गायों का।

रामनाथ को ६० गायों के लिए १२ मास में उतना ही किराया देना पड़ेगा जितना कि १ मास में ६० × १२ = ७२० गायों का।

अतः किराये का बँटवारा उनमें ४८० : २४० : ७२० अर्थात् २:१:३ के अनुपात में होगा।

समानुपाती राशियों का योग = २ + १ + ३ = ६

∴ सिद्धू द्वारा दिया गया किराया = $\frac{२}{६}$ × १५०० = ५०० रु०

बुद्धू द्वारा दिया गया किराया = $\frac{१}{६}$ × १५०० = २५० रु०

रामनाथ द्वारा दिया गया किराया = $\frac{३}{६}$ × १५०० = ७५० रु० (उत्तर)

उदाहरण ४. अ और ब ने मिलकर किसी बाँध को बँधवाने का ठीका लिया। अ २० आदमी १५ दिन तक और १५ आदमी १० दिन तक काम पर लगाता है। ब ३० आदमी १२ दिन तक और ४० आदमी ६ दिन तक लगाता है। यदि इस ठीके से अ को ६०० रु० आमदनी होती है तो ब की आमदनी ज्ञात करो।

मान लो काम एक ही दिन में कराना है।

इसलिए अ को अपने हिस्से का काम १ दिन में कराने के लिए

२० × १५ + १५ × १० = ४५० आदमी लगाना पड़ेगा।

और ब को अपने हिस्से का काम १ दिन में कराने के लिए

३० × १२ + ४० × ६

= ६०० आदमी लगाना पड़ेगा।

∴ अ और ब की आमदनी ४५० : ६०० अर्थात् ३ : ४ के अनुपात में होगी।

∴ जब अ की आमदनी ३ रु० है तो ब की आमदनी ४ रु० है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ जब अ की आमदनी ६०० रु० है तो ब की आमदनी $= \frac{४}{३} \times ६००$

$= ८००$ रु० (उत्तर)

उदाहरण ५. मोहन और सोहन ने साझे में लोहे की दूकान खोली। प्रारम्भ में मोहन ने ५००० रु० और सोहन ने १५०० रु० लगाया। दो मास बाद मोहन ने ४००० रु० और लगा दिया परन्तु सोहन ने ४ मास बाद ५००० रु० निकाल लिया यदि १२ मास के अन्त में उन्हें ६००० रु० का लाभ हुआ तो प्रत्येक का लाभ बताओ।

मोहन को ५००० रु० पर १२ मास में और ४००० रु० पर १० मास में वही लाभ होगा जो १ मास में $५००० \times १२ + ४००० \times १०$

$= ६०००० + ४०००० = १०००००$ रु० पर

और सोहन को १५००० पर ४ मास में और १०००० रु० पर ८ मास में वही लाभ होगा जो १ मास में $१५००० \times ४ + १०००० \times ८$

$= ६०००० + ८०००० = १४००००$ रु० पर

$\therefore$ लाभ का बटवारा १००००० : १४०००० अर्थात् ५ : ७ के अनुपात में होगा।

अनुपाती राशियों का योग $= ५ + ७ = १२$

$\therefore$ मोहन का लाभ $= \frac{५}{१२} \times ६००० = २५००$ रु०

और सोहन का लाभ $= \frac{७}{१२} \times ६००० = ३५००$ रु० (उत्तर)

उदाहरण ६. एक वर्ष के लिए क, ख और ग ने साझा किया, क ने $\frac{१}{४}$ पूंजी $\frac{१}{४}$ समय तक, ख ने $\frac{१}{५}$ पूंजी $\frac{१}{२}$ समय तक लगाई, ग ने शेष पूंजी पूरे समय तक लगाई तो बताओ कि वर्ष के अन्त में ११४० रु० के लाभ को वे तीनों किस प्रकार बाँटेंगे?

मान लिया कुल पूंजी $= १००$ रु०

इसलिए क की पूंजी $= \frac{१}{४} \times १०० = २५$ रु०

ख की पूंजी $= \frac{१}{५} \times १०० = २०$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

ग को पूँजी $=१००-(२५+२०)$
$=१००-४५=५५$ रु०

क के पूँजी का समय$=\frac{१}{४}$ वर्ष$=३$ मास

ख के पूँजी का समय$=\frac{१}{२}$ वर्ष$=६$ मास

ग के पूँजी का समय$=१२$ मास

∴ क को २५ रु० पर ३ मास में वही लाभ होगा

जो १ मास में $२५\times३=७५$ रु० पर

ख को २० रु० पर ६ मास में वही लाभ होगा

जो १ मास में $२०\times६=१२०$ रु० पर

ग को ५५ रु० पर १२ मास में वही लाभ होगा

जो १ मास में $५५\times१२=६६०$ रु० पर

अतः उनमें लाभ का बँटवारा ७५ : १२० : ६६० अर्थात् ५ : ८ : ४४ के अनुपात में होगा।

समानुपाती राशियों का योग$=५+८+४४=५७$

अतः क का लाभ$=\frac{५}{५७}\times ११४०=१००$ रु०

ख का लाभ$=\frac{८}{५७}\times ११४०=१६०$ रु०

ग का लाभ$=\frac{४४}{५७}\times ११४०=८८०$ रु०

उदाहरण ७. क, ख, ग ने $\frac{१}{३} : \frac{१}{४} : \frac{१}{५}$ के अनुपात से पूँजी लगा कर साझा किया। ४ महीने पश्चात् क और ख ने अपनी पूँजी का आधा भाग निकाल लिया और ७ महीने पश्चात् ग ने अपनी पूँजी का $\frac{१}{२}$ भाग और लगा दिया, वर्ष के अन्त में कुल लाभ ९९९ रु० हुआ तो क, ख और ग लाभ को आपस में किस प्रकार बाँटेंगे ?

$\frac{१}{३} : \frac{१}{४} : \frac{१}{५}$ वही अनुपात है जो २० : १५ : १२। इसलिए जब क की पूँजी २० रु० है तो ख की १५ रु० और ग की १२ रु० है।

क का २० रु० ४ महीने तक और १० रु० ८ महीने तक व्यवसाय में लगा रहा।

अतः क को २० रु० से ४ महीने में और १० रु० से ८ महीने में वही लाभ होगा जो १ महीने में $२०\times४+१०\times८=१६०$ रु० पर और ख का १५ रु० ४ महीने तक और $\frac{१५}{२}$ रु० ८ महीने तक व्यवसाय में लगा रहा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ ख को १५ रु० पर ४ महीने में और $\frac{१५}{२}$ रु० पर ८ महीने में वह लाभ होगा जो १ महीने में १५×४+$\frac{१५}{२}$×८=१२० रु० पर

∴ ग का १२ रु० ७ महीने तक और (१२+$\frac{१२}{३}$) अर्थात् १६ रु० ५ महीने तक व्यवसाय में लगा रहा।

अतः ग को १२ रु० पर ७ महीने में और १६ रु० पर ५ महीने में वही लाभ होगा जो १ महीने में १२×७+१६×५=१६४ रु० पर।

इसलिए क ख और ग में लाभ का बँटवारा १६० : १२० : १६४ अर्थात् ४० : ३० : ४१ के अनुपात में होगा।

समानुपाती राशियों का योग=४०+३०+४१=१११

∴ क का लाभ=$\frac{४०}{१११}$×९९९=३६० रु०

ख का लाभ=$\frac{३०}{१११}$×९९९=२७० रु०

ग का लाभ=$\frac{४१}{१११}$×९९९=३६९ रु०

उदाहरण ८. रमाशंकर और कृपाशंकर ने किसी व्यवसाय में १०००० रु० और १२००० रु० की पूँजी लगायी। रमाशंकर अकेला ही उसमें सक्रिय साझेदार है। इसलिए उसको अपने पूँजी और काम दोनों के लिए लाभ में से हिस्सा मिलता है। यदि उनके बीच १५४० रु० का कुल लाभ ४ : ३ के अनुपात में बाँटा गया तो रमाशंकर को प्रबन्ध करने के लिए कितना मिला?

रमाशंकर और कृपाशंकर के बीच लाभ के बँटवारे का अनुपात ४:३ है।

∴ अनुपाती राशियों का योग=४+३=७

∴ रमाशंकर को $\frac{४}{७}$×१५४०=८८० रु० मिला।

और कृपाशंकर को $\frac{३}{७}$×१५४०=६६० रु० मिला।

दोनों के पूँजी का अनुपात १०००० : १२००० अर्थात् ५ : ६ है।

∴ केवल पूँजी पर जब ६ रु० कृपाशंकर को मिला तो रमाशंकर को ५ रु० मिला।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ केवल पूँजी पर जब ६६० रु० कृपाशंकर को मिला तो रमाशंकर को

$$\frac{५ \times ६६० रु०}{६} = ५५० \text{ रु० मिला}$$

∴ प्रबन्ध के लिए कृपाशंकर को मिला धन

$= ८८० \text{ रु०} - ५५० \text{ रु०} = ३३० \text{ रु०}$

प्रश्नावली २

१. वीरेन्द्र और सुरेन्द्र मिलकर कपड़े की एक दूकान खोलते हैं। वीरेन्द्र उसमें ७०० रु० और सुरेन्द्र १२०० रु० लगाता है। यदि ६ मास में ७६० रु० का लाभ होता है तो बताओ प्रत्येक को क्या मिलता है ?

२. क, ख, और ग किसी व्यापार में साझेदार हैं। यदि उनकी पूंजी क्रमशः ८०० रु०, १२०० रु० और १६०० रु० है तो ५४० रु० के लाभ में प्रत्येक को क्या मिलेगा ?

३. अ, ब और स ने मिलकर सिमेन्ट की एक दूकान खोली। अ ने उसमें ३००० रु०, ब ने ५००० रु० और स ने ७००० रु० लगाया। १ वर्ष में कुल ४५०० रु० का लाभ हुआ तो प्रत्येक को क्या मिला ?

४. क, ख और ग ने मिलकर इस शर्त पर व्यापार आरंभ किया कि कुल लाभ में प्रत्येक को पहले पूंजी का ५% दे दिया जायगा और शेष लाभ का बंटवारा पूंजी के समानुपाती होगा। यदि उनकी लगायी गई पूंजी क्रमशः ४३२ रु० २८८ रु० और ७२० रु० है और कुल लाभ २०० रु० है तो प्रत्येक को क्या मिला ?

५. राम और श्याम ने मिल कर साझे में दुकानदारी की। राम ने उसमें ५००० रु० और श्याम ने ६००० रु० लगाया। यदि लाभ का १२% दुकान पर रक्खे गये नौकर पर व्यय होता है तो प्रत्येक को क्या मिलता है जब कि कुल लाभ १००० रु० है ?

६. क, ख और ग एक व्यापार में साझेदार हैं। उनकी लगायी गई पूंजी का अनुपात $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ है। यदि कुल लाभ ६५० रु० है तो प्रत्येक को क्या मिलेगा ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. हरी और श्री ने मिलकर एक व्यवसाय में १२००० और १५००० रु० लगाया। हरी उसमें सक्रिय साझेदार है। यदि १८०० रु० का लाभ उनमें ३ : २ के अनुपात में बाँटा गया तो प्रबन्ध करने के लिए हरी को क्या मिला ?

८. क और ख मिलकर किसी व्यवसाय में २५० रु० और ३०० रु० लगाते हैं। यदि क सक्रिय साझेदार है और उसे प्रबन्ध करने के लिए लगी हुई कुल पूँजी का १०% लाभ में से मिलता है तो ३८६ रु० १० पैसे का लाभ उनमें कैसे बाँटा जायेगा ?

९. क, ख और ग एक व्यापार में सम्मिलित हुए। क ने ७०० रु० और ख ने ८४० रु० लगाए और सब को कुल ४०० रु० का लाभ हुआ। यदि इस लाभ में से ग को ९२ रु० मिला तो उसके द्वारा लगाई गयी पूँजी ज्ञात करो और यह बताओ कि क और ख को क्या मिला ?

१०. क, ख और ग मिलकर कोई व्यापार करते हैं। इसमें ४०००० रु० की कुल पूँजी लगाई जाती है। ख, क से ४००० अधिक और ग, ख से ८००० रु० अधिक लगाता है तो २५०० रु० लाभ को वे किस प्रकार बाँटेंगे ?

११. हरी, श्री और रवी मिलकर किसी व्यवसाय में कुल २५०० रु० की पूँजी लगाते हैं। हरी श्री से ४००रु० अधिक और श्री रवी से ३०० रु० अधिक लगाता है। इस व्यवसाय से २५०० रु० का घाटा हो जाता है। अब अपनी-अपनी बची पूँजी से वे दूसरे व्यवसाय में बली के साथ सम्मिलित हो जाते हैं। यदि इस व्यवसाय में बली को ४५० रु० लाभ होता है तो उसकी पूँजी ज्ञात करो और अन्य तीनों का लाभ भी ज्ञात करो।

१२. बेचूराम, कन्हैया से १५० रु०, श्रीकान्त से २०० रु० और घुरपतरी लाल से २५० रु० कर्ज लेता है। सूद के नीचे बेचूराम उनको अपना बैल दे देता है जो ३००रु० में बिक जाता है। तो कर्ज देने वालों को क्या मिला ?

१३. क, ख और ग ने साझे में गल्ले की एक दूकान खोली। क ने ५०० रु० ४ मास तक, ख ने ६०० रु० ५ मास तक और ग ने ४०० रु० १० मास तक लगाया। यदि कुल लाभ १०८०रु० हुआ तो प्रत्येक को क्या मिला ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१४. क किसी व्यापार को ४०० रु० से आरंभ करता है और ३ मास बाद उसमें ख भी ५०० रु० की पूंजी से सम्मिलित हो जाता है। ५ मास बाद उसमें ६०० रु० से ग भी सम्मिलित हो जाता है। यदि वर्ष के अन्त में कुल ४५० रु० का लाभ होता है तो प्रत्येक का लाभ बताओ।

१५. मुन्नीलाल और सीताराम मिलकर किसी व्यापार में ७०० रु० और ९०० रु० लगाते हैं। चार मास बाद मुन्नीलाल ३०० रु० और लगाता है। परन्तु सीताराम ४५० रु० निकाल लेता है। उसी समय मनमोहनदास ९०० रु० से व्यापार में सम्मिलित हो जाता है तो १५०० रु० के लाभ का बंटवारा कैसे होगा यदि व्यापार प्रारंभ से १२ मास तक चला ?

१६. अ, ब और स ने मिलकर किसी व्यापार को आरम्भ किया। व्यापार में उनकी लगी हुई पूंजी क्रमशः ५०० रु०, ८०० रु० और १००० रु० है। दो मास बाद अ ३०० रु० और ब ४०० रु० निकाल लेता है। यदि व्यापार केवल ६ मास तक चला तो ९३५ रु० के लाभ में प्रत्येक को क्या मिलेगा ?

१७. क किसी व्यवसाय को २५० रु० से आरंभ करता है। दो मास बाद ख भी उसमें सम्मिलित हो जाता है। ४ मास बाद उनके बीच लाभ का बंटवारा २ : ३ के अनुपात में बाँटा जाता है तो ख की पूंजी ज्ञात करो।

१८ ३ आदमियों ने एक मकान १४४० रु० किराये पर १ वर्ष के लिए लिया। पहला आदमी उस मकान में १ जनवरी से १४ मार्च तक रहा। दूसरा उसमें १५ मार्च से ७ अगस्त तक और तीसरा ८ अगस्त से साल के अन्त तक रहा। तो बताओ प्रत्येक को कितना किराया देना पड़ा ?

१९. अमरकान्त और रमाकान्त ने मिलकर बिजली के सामानों की एक दूकान खोली अमरकान्त ने २५००० रु० ३ मास के लिए लगाया और रमाकान्त ने २०००० रु० ५ मास के लिए लगाया। अमरकान्त दूकान का प्रबन्धक भी है जिसके लिए भी उसको लाभ में हिस्सा मिलता है। यदि ५ मास बाद ७००० रु० के लाभ को उनमें ४ : ३ के अनुपात में बाँटा जाता है तो अमरकान्त को प्रबन्ध के लिए कितना मिलता है ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२०. बीमा कम्पनी का कोई एजेन्ट सबसे पहले क का ५००० रु० का, ३ मास बाद ख का १५००० रु० का और इसके ५ मास बाद ग का ३०००० रु० का बीमा कराता है। यदि प्रारंभ से १२ मास बाद उसे इन बीमों पर ६३० रु० बोनस मिलता है तो बताओ कि प्रत्येक बीमे से उसे क्या प्राप्त हुआ ?

२१. रामदास, हरीदास और गुलाबदास ने एक चरागाह १ वर्ष के लिए २८० रु० किराये पर लिया। रामदास उसमें ५० गायें ६ मास तक, हरीदास ७५ गायें ८ मास तक और गुलाबदास ने १०० गायें वर्ष के अन्त तक चरायीं, तो प्रत्येक को कितना किराया देना पड़ा ?

२२. क, ख और ग ने एक चरागाह ६ मास के लिए १५० रु० में किराये पर लिया। क के पास १०० भेड़ें, ख के पास १५० भेड़ें और ग के पास २०० भेड़ें थीं। २ मास बाद क अपनी आधी भेड़ों को ख के हाथ बेच देता है और ४ मास बाद ख और ग की चौथाई भेड़ें बीमारी से मर जाती हैं तो अन्त में प्रत्येक को क्या देना पड़ा ?

२३. क, ख, और ग एक व्यापार में साझेदार थे और उनके हिस्से $\frac{१}{२} : \frac{१}{३} : \frac{१}{४}$ के अनुपात में हैं। ४ महीने बाद क ने अपनी पूँजी का आधा हटा लिया। ८ महीना और बीत जाने पर २०२४ का लाभ आपस में बाँट लिया गया तो बताओ कि क को क्या मिला ?

२४. अ, ब, स क्रमशः $\frac{१}{३} : \frac{१}{४} : \frac{१}{५}$ के अनुपात से पूँजी लगाकर एक कारखाना खोलते हैं। अ ने अपनी आधी पूँजी ४ मास पश्चात् निकाल लिया। ब ने अपनी पूँजी का $\frac{१}{३}$ भाग ६ मास बाद और लगा दिया और स ने अकेले कारखाने का प्रबन्ध किया जिसके लिए उसे २०० रु० मासिक मिलता रहा। यदि वर्ष के अन्त में कुल लाभ ८८२५ रु० है तो प्रत्येक को क्या मिला ?

———

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

3 प्रतिशतता (PERCENTAGES)

यदि कई दी हुई भिन्नों (fraction's) के मान का तुलनात्मक अध्ययन करना हो तो हम उनको ऐसी भिन्नों में बदलते हैं जिनके हर समान हों और यह देखते हैं कि अब किस भिन्न का अंश छोटा है और किसका अंश बड़ा है। जैसे :— $\frac{१}{३}, \frac{२}{५}$ और $\frac{५}{१२}$ का हर समान करने पर क्रमशः $\frac{२०}{६०}, \frac{२४}{६०}, \frac{२५}{६०}$ के बराबर हैं, इनमें $\frac{२०}{६०}$ का अंश सबसे छोटा है, इसलिये $\frac{१}{३}$ सबसे छोटी भिन्न है। इसी प्रकार $\frac{२५}{६०}$ का अंश सबसे बड़ा है। इसलिये $\frac{५}{१२}$ सबसे बड़ी भिन्न है।

उपरोक्त उदाहरण में सभी भिन्नों का हर ६० लिया गया है। हम कोई भी अन्य हर ले सकते हैं जैसे १२० या २४० इत्यादि। इसी प्रकार हम भिन्नों के हर को १०० ले सकते हैं। हरों को १०० के बराबर लेने से कभी-कभी विशेष सुविधा हो जाती है। जैसे एक विद्यालय में हाई स्कूल परीक्षा में २०० विद्यार्थी बैठते हैं और १०६ विद्यार्थी सफल होते हैं। और एक अन्य विद्यालय में ५०० विद्यार्थी परीक्षा में बैठते हैं और २५५ विद्यार्थी सफल होते हैं। हमको ज्ञात करना है कि किस विद्यालय का परीक्षाफल अच्छा है। भिन्नों द्वारा प्रकट करने पर विद्यालयों के परीक्षाफल $\frac{१०६}{२००}$ तथा $\frac{२५५}{५००}$ हैं। इससे पता नहीं चलता कि किसका परीक्षाफल अच्छा है। अब भिन्नों का हर १०० कर दें तो वे $\frac{५३}{१००}$ तथा $\frac{५१}{१००}$ हैं। यहाँ $\frac{५३}{१००}$ का अंश बड़ा है। अतः पहले विद्यालय का परीक्षाफल दूसरे से अच्छा है।

यहाँ $\frac{५३}{१००}$ को दूसरे शब्दों में ५३ प्रतिशत तथा $\frac{५१}{१००}$ को ५१ प्रतिशत कहेंगे। इसका अर्थ है १०० में ५३ या १०० में ५१, या १०० पीछे ५३ या १०० पीछे ५१। प्रतिशत को संकेत % से प्रकट करते हैं जैसे ५३% या ५१%। इसको प्र० श० (P. C.) भी लिखते हैं।

प्रतिशत एक ऐसी भिन्न है जिसका हर १०० है तथा अंश प्रतिशत की संख्या है। बहुधा प्रतिशत लिखते समय हर छोड़ दिया जाता है। जैसे $\frac{७}{१००}$ को ७% और $\frac{३\frac{१}{२}}{१००}$ को $३\frac{१}{२}$% लिखेंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण १. भिन्न $\frac{१}{४}$ तथा $\frac{२}{३}$ का प्रतिशत के रूप में बदलो।

$$\frac{१}{४} = \frac{१ \times १००}{४ \times १००} = \frac{\frac{१}{४} \times १००}{१००} = \frac{२५}{१००} = २५\%$$

$$\frac{२}{३} = \frac{२ \times १००}{३ \times १००} = \frac{\frac{२}{३} \times १००}{१००} = \frac{६६\frac{२}{३}}{१००} = ६६\tfrac{२}{३}\%$$

उदाहरण २. १५% तथा $६\frac{२}{३}\%$ को भिन्न के रूप में लिखो।

$$१५\% = \frac{१५}{१००} = \frac{३}{२०}$$

$$६\tfrac{२}{३}\% = \frac{२०}{३}\% = \frac{\frac{२०}{३}}{१००} = \frac{२०}{३ \times १००} = \frac{१}{१५}$$

उदाहरण ३. ·१७ तथा ·०७५ को प्रतिशत में प्रकट करो।

$$·१७ = \frac{·१७ \times १००}{१००} = \frac{१७}{१००} = १७\%$$

$$·०७५ = \frac{·०७५ \times १००}{१००} = \frac{७·५}{१००} = ७·५\%$$

उदाहरण ४. २०% तथा $६\frac{१}{४}\%$ को दशमलव में बदलो।

$$२०\% = \frac{२०}{१००} = ·२$$

$$६\tfrac{१}{४}\% = ६·२५\% = \frac{६·२५}{१००} = ·०६२५$$

प्रतिशत की गणना तथा विलोम प्रश्न :

उदाहरण १. (क) ७८० रु० का $१\frac{२}{१३}\%$ (ख) ५ घंटे का १५% के मान बताओ।

$$७८० \text{ रु० का } १\tfrac{२}{१३}\% = ७८० \text{ रु० का } \frac{१\frac{२}{१३}}{१००}$$

$$= ७८० \times \frac{१५}{१३ \times १००} = ९ \text{ रु०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$५ \text{ घंटे का } १५\% = ५ \text{ घंटे का } \frac{१५}{१००} = ५ \times \frac{१५}{१००} \text{ घंटा}$$

$$= \frac{३}{४} \text{ घंटा}$$

उदाहरण २. कितने रु० का १५%, ६० रुपया है।

अभीष्ट रु० का १५% = ६० रु०

$\therefore$ अभीष्ट रु० का $\frac{१५}{१००}$ = ६० रु०

$$\therefore \text{ अभीष्ट रु०} = \frac{६० \times १००}{१५} = ४०० \text{ रु०}$$

उदाहरण ३. एक आदमी अपने वेतन से ७५० रु० व्यय करके अपने वेतन का २५% बचा लेता है तो उसका वेतन बताओ।

बचत = वेतन का २५%

$\therefore$ व्यय = (१००−२५)% = ७५% = $\frac{७५}{१००}$ भाग

$\because$ वेतन का $\frac{७५}{१००}$ भाग = ७५० रु०

$$\therefore \text{ वेतन} = \frac{७५० \times १००}{७५} = १००० \text{ रु०}$$

उदाहरण ४. एक मकान बनाने में जितना रुपया खर्च होता है उसमें ३०% ईंट, १५% सीमेन्ट, १०% लोहा, २५% मजदूरी तथा शेष अन्य खर्च हैं। यदि अन्य खर्च ४००० रु० है तो मकान बनाने का सब खर्च बताओ?

ईंट, सीमेन्ट, लोहा तथा मजदूरी का खर्च = ३०% + १५% + १०% × २५% = ८०%

$\therefore$ अन्य खर्च = (१००−८०)% = २०%

$\because$ जब अन्य खर्च २० रु० है तो कुल खर्च = १०० रु०

$$\therefore \text{ ,, ,, ,, } ४००० \text{ रु० ,, ,, } = \frac{१०० \times ४०००}{२०}$$

$$= २०,००० \text{ रु०}$$

$\therefore$ मकान बनाने का कुल खर्च = २०,००० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ५. २५ लीटर दूध में ६$\frac{१}{४}$ लीटर पानी मिला दिया जाता है तो मिश्रण में कितने % दूध है ?

मिश्रण = (२५+६$\frac{१}{४}$) लीटर

$=\frac{१२५}{४}$ लीटर

अब $\frac{१२५}{४}$ लीटर मिश्रण में दूध = २५ लीटर

∴ १०० ,, ,, ,, $=\frac{२५\times४\times१००}{१२५}$

= ८० लीटर

∴ दूध का प्रतिशत=८०%

उदाहरण ६. एक चुनाव में दो उम्मीदवार थे। एक ने ७२% मत पाये और ८८०० मतों के बहुमत से चुन लिया गया तो चुनाव में कुल कितने मत पड़े थे ?

एक उम्मीदवार ने ७२% मत पाये।

तो दूसरे ने (१००–७२)%=२८% मत पाये।

दोनों के मतों का अन्तर = (७२–२८)% =४४%

∵ जब अन्तर ४४ है तो मतों की संख्या = १००

∴ ,, ,, ८८०० ,, ,, ,, $=\frac{१००\times८८००}{४४}$

= २०,०००

∴ अभीष्ट मतों की संख्या = २०,०००

उदाहरण ७. किसी नगर की जनसंख्या एक साल में ५% बढ़ती है और दूसरे साल ५% कम हो जाती है। यदि दूसरे साल के अन्त में कुल जनसंख्या १९९,५०० है तो प्रारम्भ में क्या थी ?

दूसरे साल जनसंख्या ५% कम होती है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ जब दूसरे साल के प्रारम्भ में जनसंख्या १०० थी तो अन्त में ९५ हो जाती है।

∵ जब दूसरे साल के अन्त में १९९,५०० हैं तो प्रारम्भ की जनसंख्या

$$= \frac{१९९,५०० \times १००}{९५}$$

$$= २१०,०००$$

∴ पहले साल के अन्त की जनसंख्या = २१०,०००

अब पहले साल जनसंख्या में ५% वृद्धि होती है।

∵ जब पहले साल के अन्त में जनसंख्या १०५ है तो प्रारम्भ में = १००

∴ " " " " २१०,००० "

$$= \frac{१०० \times २१०,०००}{१०५}$$

$$= २००,०००$$

∴ अभीष्ट जनसंख्या = २००,०००

प्रश्नावली ३ (क)

निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत के रूप में बदलो।

१. $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{८}$, ·२४, ·०२५, ·३

२. निम्नलिखित प्रतिशतताओं को साधारण भिन्न में बदलो।

२५%, ३३$\frac{१}{३}$%, १२५%, १·७५%

३. निम्नलिखित प्रतिशतताओं को दशमलव भिन्न में बदलो।

१२%, ३७%, ३%, १·०५%

४. निम्नलिखित के मान बताओ।

(क) ७०० रु० का २५% (ख) १० रु० ७५ पैसे का ४०%

(ग) १२१·४४ मीटर का २$\frac{३}{११}$% (घ) .७ रु० का १८%

५. कितने प्रतिशत है।

(क) १५ रु० का ३ रु० (ख) ४ किलोमीटर का ५०० मीटर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ग) १ रु० २१ पैसे का ११ पैसा (घ) ५ किलोग्राम का ५ ग्राम (च) २५ सेंमी० का ५ मीटर ।

६. रिक्त स्थानों को भरो ।

(क) ......का १५%=३०० रु० (ख) ५०० का ...%=५५रु०

(ग) २० मीटर का ५%=...सेंमी०

७. एक परीक्षा में ४५% विद्यार्थी पास होते हैं । यदि फेल होने वालों की संख्या २७५ है तो कुल परीक्षार्थियों की संख्या तथा पास होने वालों की संख्या बताओ ?

८. एक आदमी अपने वेतन से ५६० रु० व्यय करके वेतन का ३०% बचाता है तो उसका वेतन बताओ ?

९. एक जंगल में १५% वृक्ष आँधी से गिर गये और शेष के ४०% काट डाले गये । यदि बचे हुए पेड़ों की संख्या १,५३,००० है तो जंगल में वृक्षों की संख्या क्या थी ?

१०. एक लड़का अपने मासिक जेब खर्च का ४०% खाने पर, १०% जलपान में, १५% फीस देने में, एक चौथाई तेल साबुन इत्यादि में और ५% सिनेमा पर व्यय करता है और शेष पैसे डाकखाने में जमा करता है । यदि साल के अन्त में वह ९० रु० बचा लेता है तो प्रति मास खर्च के लिये कितना पाता है ?

११. एक नगर की जनसंख्या १,०००,००० है । इसमें प्रति वर्ष ५% की वृद्धि होती है तो तीन वर्ष बाद उसकी जनसंख्या क्या होगी ?

१२. एक नगर की जनसंख्या १ वर्ष में १०% बढ़ती है और दूसरे वर्ष में १०% घट जाती है । यदि दूसरे वर्ष के अन्त में नगर की जनसंख्या १९८,००० है तो प्रारम्भ में कितनी थी ?

१३. एक चुनाव क्षेत्र में दो प्रत्याशी खड़े हैं । इनमें से एक को कुल मतों के ६५% मत मिले । यदि वह ३६००० मतों से विजयी होता है तो चुनाव में पड़े हुए कुल मतों की संख्या बताओ ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१४. यदि पानी जमने में अपने आयतन का ९% बढ़ जाता है तो ज्ञात करो कि पिघलने में बर्फ का आयतन कितने प्रतिशत कम हो जाता है ?

१५. मोहन की आमदनी सोहन की आमदनी से १०% अधिक है और सोहन की आमदनी जोखन की आमदनी से १०% अधिक है तो मोहन की आमदनी जोखन की आमदनी से कितने प्रतिशत अधिक है ?

१६. किसी घन्टे के बनाने में ७५% पीतल और १०% काँसा, शेष अन्य धातु है। यदि अन्य धातु की मात्रा ४५० ग्राम है तो घन्टे की मात्रा बताओ।

१७. गाय के दूध में ५% मक्खन होता है। एक ग्वाले ने ४० किलोग्राम दूध में से १·७५ किलोग्राम मक्खन निकाल लिया तो दूध में कितने प्रतिशत मक्खन शेष है ?

१८. यदि मोहन की आय सोहन की आय से १०% अधिक है तो सोहन की आय मोहन से कितने प्रतिशत कम है ?

१९. विनय कुमार को परीक्षा में अरुण कुमार से २५% अंक अधिक मिले तो बताओ कि अरुण कुमार को विनय कुमार से कितने प्रतिशत अंक कम मिले।

२०. वाराणसी से कलकत्ता की दूरी रेलमार्ग से १००० किलोमीटर है। एक मेल ट्रेन वाराणसी से कलकत्ता जाने के लिए रवाना हुई। $२\frac{१}{२}$ घन्टा चलने के बाद इंजन में खराबी आने के कारण ट्रेन की गति २०% कम हो जाती है और वह कलकत्ता $२\frac{१}{२}$ घन्टे लेट पहुँचती है तो गाड़ी की चाल बताओ ?

प्रतिशतता सम्बन्धी विविध प्रश्न

उदाहरण १. दूध का मूल्य १०% बढ़ जाता है। तो बताओ कि कोई आदमी उसके खर्च की मात्रा कितने प्रतिशत कम कर दे कि उसका दूध पर व्यय न बढ़े ?

दूध का मूल्य १०% बढ़ जाता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ जितना दूध पहले १०० रु० में मिलता था उतना ही अब ११० रु० में मिलेगा।

अब ११० रु० खर्च करने पर दूध की पूरी मात्रा मिल सकती है।

∵ १०० ,, ,, ,, $= \frac{१००}{११०}$ मात्रा मिल सकती है।

∴ दूध की मात्रा में कमी $= १ - \frac{१००}{११०} = १ - \frac{१०}{११} = \frac{१}{११}$

$= \frac{\frac{१}{११} \times १००}{१००}$

$= ९\frac{१}{११}\%$

उदाहरण २. आम के मूल्य में २०% कमी हो जाने से एक आदमी २० रु० में पहले से १०० आम अधिक खरीद सकता है। तो पहले एक आम का क्या मूल्य था।

प्रथम विधि : मान लिया पहले १ आम का मूल्य = य रु०

∴ १५ रु० में मिले आमों की संख्या $= \frac{२०}{य}$

अब २०% कमी होने पर एक आम का मूल्य $= य \times \frac{८०}{१००} = \frac{४}{५}$ य रु०

∴ अब १५ रु० में मिलने वाले आमों की संख्या $= \frac{२०}{\frac{४}{५}य} = \frac{२५}{य}$

$= \frac{२५}{य} - \frac{२०}{} = १००$

या $\frac{५}{य} = १००$

∵ य $= \frac{५}{१००}$ रु०

$= ५$ पैसा

∴ अभीष्ट एक आम का दाम $= ५$ पैसे

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

द्वितीय विधि : ∵ आम के मूल्य में २०% कमी हो जाती है,

∴ जो आम पहले १०० रु० में मिलते थे अब ८० रु० में मिलते हैं

अतः ,, ,, २० रु० ,, ,, $= \frac{८० \times २०}{१००}$ =१६ रु० में मिलते हैं।

∵ २०—१६ = ४ रु० बच जाता है।

अतः नयी दर से १०० आम का मूल्य = ४ रु०

,, ,, १ ,, ,, $= \frac{४}{१००}$ रु० = ४ पै०

तथा पहले १ आम का दाम $= \frac{४ \times १००}{८०}$ = ५ पै०

∴ ५ पै० उत्तर

उदाहरण ३. एक नगर की जनसंख्या ३५००० है। यदि पुरुषों की संख्या ७% तथा स्त्रियों की संख्या ४% बढ़ जाती है तो जनसंख्या ३६७६० हो जाती है। नगर में पुरुषों तथा स्त्रियों की संख्या बताओ?

यदि पुरुषों तथा स्त्रियों दोनों की संख्या ४% बढ़ जाय तो

जनसंख्या $= \frac{३५००० \times १०४}{१००}$

= ३६४००

∴ पुरुषों की संख्या का ३% = ३६७६०—३६४०० = ३६०

∴ पुरुषों की संख्या $= \frac{३६० \times १००}{३}$ = १८०००

∴ स्त्रियों की संख्या = ३५०००—१८००० = १७०००

उदाहरण ४. अ और ब मिलकर १८०० रु० कमाते हैं। वे क्रमशः अपने वेतनों का ७०% तथा ७५% व्यय कर देते हैं। यदि उनकी बचत में ३ : २ का अनुपात है, तो उनके अलग-अलग वेतन बताओ।

अ अपने वेतन का ३०% तथा ब अपने वेतन का २५% बचत करते हैं।

∵ अ के वेतन का $\frac{३}{१०}$: ब के वेतन का $\frac{१}{४}$ = ३ : २

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ अ के वेतन का $\left(\frac{३}{१०} \times २\right)$ = ब के वेतन का $\left(\frac{१}{४} \times ३\right)$

या अ के वेतन का $\frac{३}{५}$ = ब के वेतन का $\frac{३}{४}$

∴ $\frac{\text{अ का वेतन}}{\text{ब का वेतन}} = \frac{\frac{३}{४}}{\frac{३}{५}} = \frac{५}{४}$

∴ अ का वेतन $= \frac{५}{९} \times १८०० = १०००$ रु०

∴ ब का वेतन $= \frac{४}{९} \times १८०० = ८००$ रु०

उदाहरण ५. एक सेना के १० सैनिक युद्ध में मारे गये तथा शेष के १५% मारे गये। यदि सेना में बचे हुये सैनिकों की संख्या १५३० है तो कुल सैनिकों की संख्या क्या थी।

युद्ध में १०% सैनिक मारे जाते हैं।

∴ मरने से बचे सैनिकों की संख्या कुल संख्या की ९०% $= \frac{९०}{१००}$ है।

शेष सैनिकों में से १५% घायल हैं।

∴ घायल होने से बचे सैनिकों की संख्या शेष की ८५% $= \frac{८५}{१००}$ है

∴ घायल होने से बचे सैनिकों की संख्या कुल सैनिकों की संख्या की

$$\frac{९०}{१००} \times \frac{८५}{१००} \text{ है।}$$

किन्तु शेष सैनिकों की संख्या = १५३०

∴ कुल सैनिको की संख्या $= १५३० \times \frac{१०० \times १००}{९० \times ८५} = २०००$

उदाहरण ६. किसी परीक्षा में ७०% विद्यार्थी हिन्दी में तथा ६५% गणित में पास होते हैं और २०% विद्यार्थी दोनों विषयों में फेल होते हैं। यदि दोनों विषयों में पास होने वाले विद्यार्थियों की संख्या १६५ है तो कुल परीक्षार्थियों की संख्या बताओ ?

हिन्दी में ७०% विद्यार्थी पास होते हैं।

∴ हिन्दी में ३०% विद्यार्थी फेल होते हैं।

∴ २०% हिन्दी तथा गणित दोनों में फेल होते हैं।

∴ (३० – २०)% = १०% केवल हिन्दी में फेल होते हैं।

इसी प्रकार गणित में (१०० – ६५)% = ३५% फेल होते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ (३५–२०) % = १५% केवल गणित में फेल होते हैं।

अतः हिन्दी अथवा गणित अथवा दोनों में

१०%+१५%+२०%=४५%फेल होते हैं।

∴ दोनों विषयों में (१००–४५)%=५५% पास होते हैं।

∵ जब ५५ विद्यार्थी पास होते हैं तो कुल परीक्षार्थियों की संख्या=१००

∴ ,, १६५ ,, ,, ,, ,, ,, $= \frac{१०० \times १६५}{५५}$

=३००

∴ अभीष्ट परीक्षार्थियों की संख्या= ३००

प्रश्नावली ३ (ख)

१, यदि दाल का भाव २०% बढ़ जाय तो कोई परिवार दाल का खर्च कितने प्रतिशत कम कर दें कि दाल पर खर्च न बढ़ाना पड़े ?

२. यदि घी का भाव ३०% बढ़ जाय तो कोई परिवार घी का खर्च कितने प्रतिशत कम कर दे कि घी पर व्यय न बढ़ाना पड़े ?

३. यदि कपड़े का भाव २५% बढ़ जाय तो कोई मनुष्य कपड़े पर व्यय कितना प्रतिशत कम कर दे कि कपड़े पर खर्च पहले ही जैसा रह जाय ?

४. चीनी का भाव ७५ % बढ़ जाता है तो कोई मनुष्य कितने प्रतिशत चीनी का प्रयोग कम कर दे कि चीनी पर व्यय पहले ही जैसा रह जाय ?

५. चने के भाव में २०% कमी हो जाने से कोई मनुष्य चने का खर्च कितने प्रतिशत बढ़ा सकता है यदि वह इस बात का ध्यान रखता है कि चने पर खर्च ज्यों का त्यों बना रहे ?

६. यदि सन्तरों का भाव १८$\frac{३}{४}$% बढ़ जाय तो १ रु० में तीन सन्तरें कम मिलेंगे। सन्तरों की पुरानी दर बताओ ?

७. आम के भाव में ५% वृद्धि हो जाने से १ रु० में १ आम कम खरीद सकता हूँ। आम का पुराना भाव बताओ ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८. जब आम का भाव १२½% कम हो जाता है तो २५ पैसे में २ आम और खरीदा जा सकता है। तो नये दर से १ रु० में कितना आम खरीदा जा सकता है ?

९. यदि अमरूद के भाव में ६ ¼% कमी आ जाय तो १ रु० में २ अमरूद अधिक खरीदे जा सकते हैं तो अमरूद का भाव बताओ।

१०. अन्डों के भाव में २०% की कमी आ जाने से १ रु० में १ अन्डा अधिक खरीदा जा सकता है तो पहले अन्डे का क्या भाव था ?

११. किसी नगर की जनसंख्या ५०००० है। यदि उसमें ५% पुरुष तथा १०% स्त्रियों की वृद्धि हो जाय तो वह ५३००० हो जायेगी। नगर में पुरुषों तथा स्त्रियों की संख्या अलग-अलग बताओ।

१२. किसी नगर की जनसंख्या ४५००० है। बीमारी पड़ने से १०% पुरुष और ५% स्त्रियां मर जाती हैं। यदि जनसंख्या घटकर ४१५०० हो जाती है तो नगर में पुरुषों और स्त्रियों का क्या अनुपात था ?

१३. किसी नगर में स्त्रियों और बच्चों की संख्या ७०००० है। यदि स्त्रियां १०% कम हो जायें और बच्चे ५% बढ़ जायें तो जनसंख्या घट कर ६७५०० हो जाती है तो प्रत्येक की संख्या बताओ।

१४. दो अध्यापकों का वेतन २४२५ रु० है। यदि वे क्रमशः अपने वेतन का ८०% और ६०% व्यय करते हैं तो उनकी बचत में २८:४१ का अनुपात है तो प्रत्येक का वेतन बताओ।

१५. दो मजदूर मिलकर ५०० रु० कमाते हैं। यदि वे अपने वेतन का क्रमशः ४०% और ६०% व्यय कर देते हैं तो उनकी बचत का अनुपात ३ : २ है, तो अलग-अलग उनका वेतन बताओ।

१६. एक सेना के २५% सैनिक युद्ध में मारे जाते हैं और शेष के १२% घायल हो जाते हैं। यदि बचे हुये सैनिकों की संख्या ३३०० है तो सैनिकों की कुल संख्या क्या थी ?

१७. एक व्यापारी ५००० रु० से व्यापार शुरू करता है। पहली बार उसे २०% की हानि होती है। शेष रुपए से उसने फिर व्यापार किया और इस बार

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0 In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उसे १५% का लाभ हुआ। इस रुपए से उसने फिर व्यापार शुरू किया। यदि तीसरी बार उसकी पहली पूँजी वापस मिल गई तो बताओ तीसरी बार उसको कितने प्रतिशत का लाभ हुआ ?

१८. किसी परीक्षा में ६०% विद्यार्थी इतिहास में और ७०% भूगोल में उत्तीर्ण होते हैं। यदि २५% दोनों विषयों में फेल होते हैं तो बताओ कुल कितने विद्यार्थी दोनों विषयों में उत्तीर्ण हुए ?

१९. एक परीक्षा में ६०% परीक्षार्थी अंग्रेजी में और ५०% गणित में पास हुए तथा २०% दोनों में फेल हुए। यदि दोनों विषयों में ३६० परीक्षार्थी पास हुए तो समस्त परीक्षार्थियों की संख्या बताओ।

२०. एक परीक्षार्थी तीन विषयों में परीक्षा देता है जिनमें क्रम से २००, ३०० और ४०० पूर्णांक हैं। यदि वह पहले विषय में ५०%, दूसरे में ६०% और तीसरे में ६५% अंक पाता है तो तीनों विषयों को मिला कर कितने प्रतिशत अंक पाता है ?

२१. किसी पाठशाला में जिसमें लड़के और लड़कियाँ दोनों पढ़ते हैं। ७ वर्ष से कम के बच्चे २०% हैं और ७ वर्ष से बड़ी लड़कियों की संख्या १० वर्ष से बड़े लड़कों की संख्या का $\frac{2}{3}$ है। यदि कुल लड़कियां ६४ हैं तो पाठशाला में कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

२२. एक कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी ने हिन्दी अथवा अंग्रेजी ली। ७५% विद्यार्थियों ने हिन्दी और ५०% विद्यार्थियों ने अंग्रेजी ली। यदि २०० विद्यार्थियों ने दोनों विषयों को लिया तो कक्षा में सम्पूर्ण विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

4 लाभ तथा हानि
(PROFIT AND LOSS)

कोई वस्तु जितने मूल्य में खरीदी जाती है अथवा किसी वस्तु के उत्पादन में जो व्यय होता है उसे उस वस्तु का क्रय मूल्य या लागत (Cost Price) कहते हैं और जितने में बेची जाती है उसे उसका विक्रय मूल्य (Selling Price) कहते हैं।

यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य (अथवा लागत) से अधिक होता है, तो व्यवसायी को लाभ होता है, जो विक्रय मूल्य तथा क्रय मूल्य (अथवा लागत) के अन्तर के बराबर होता है। यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य (अथवा लागत) से कम है, तो व्यवसायी को हानि होती है जो क्रय मूल्य (अथवा लागत) और विक्रय मूल्य के अन्तर के बराबर होता है।

जैसे : बैल का कोई व्यापारी ५०० रु० में एक बैल खरीदता है और ५५० रु० में किसी किसान के हाथ बेच देता है; तो व्यापारी को ५५० रु० — ५०० रु० अर्थात् ५० रु० का लाभ होता है। यदि व्यापारी किसी कारण वश उस बैल को ४६० रु० में ही बेच देता है, तो उसे ५०० रु०—४६० रु० अर्थात् ४० रु० की हानि होती है। इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण से हम देखते हैं कि क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य, लाभ और हानि में निम्न लिखित सम्बन्ध होते हैं। —

लाभ = विक्रय मूल्य — क्रय मूल्य

हानि = क्रय मूल्य — विक्रय मूल्य

प्रतिशत लाभ अथवा हानि — गाँव का एक बनिया कुछ गेहूँ ५० रु० में खरीदता है और बाजार में उसे ५५ रु० में बेच देता है। वही बनिया कुछ सरसों २० रु० में खरीदता है और उसे २५ रु० में बेच देता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों प्रकार के व्यापारों में उसे पाँच, पाँच रु० का लाभ होता

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

है। अब प्रश्न यह उठता है कि उसे कौन-सा व्यापार अधिक लाभदायक है। हम देखते हैं कि गेहूँ के व्यापार में ५० रु० लगाने पर ५ रु० का लाभ होता है अर्थात् क्रय मूल्य का $\frac{५}{५०}$ भाग या १०% लाभ होता है। और सरसों के व्यापार में २० रु० लगाने पर ५ रु० का लाभ होता है अर्थात् क्रय मूल्य का $\frac{५}{२०}$ भाग या २५% लाभ होता है। अतः सरसों का व्यापार अधिक लाभ-दायक है।

इस बात पर विशेष ध्यान रखना चाहिए कि लाभ अथवा हानि की प्रतिशता (Percentage) क्रय मूल्य पर ही निकाली जाती है।

$$\text{प्रतिशत लाभ या हानि} = \frac{\text{कुल लाभ या हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times १००$$

उदाहरण १. कोई वस्तु ५ रु० में खरीदी जाती है और ५ रु० ५० पैसे में बेची जाती है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

कुल लाभ=५ रु० ५० पैसे—५ रु०=५० पैसे=$\frac{१}{२}$ रु०

$$\text{इसलिए प्रतिशत लाभ} = \frac{\frac{१}{२}}{५} \times १०० = \frac{१००}{२ \times ५} = १०\%$$

उदाहरण २. कोई वस्तु १० रु० में खरीदी जाती है और ९ रु० में बेच दी जाती है तो प्रतिशत हानि ज्ञात करो।

कुल हानि=१० रु०—९ रु०=१ रु०

$$\text{इसलिए प्रतिशत हानि} = \frac{१}{१०} \times १०० = \frac{१००}{१०} = १०\%$$

उदाहरण ३. सालिकराम ने १० क्विन्टल गुड़ ८० रु० प्रति क्विन्टलके भाव से खरीदा और उसे १००० रु० में बेच दिया तो उसे कितना प्रतिशत लाभ हुआ।

८० रु० प्रति क्विन्टल के भाव से १० क्विन्टल गुड़ का

क्रय मूल्य=८०×१०=८०० रु०

और विक्रय मूल्य=१००० रु०

अतः कुल लाभ=१००० रु०—८०० रु०=२०० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ प्रतिशत लाभ $= \frac{२००}{८००} \times १०० = २५\%$

उदाहरण ४. कोई गाय ५२५ रु० में खरीदी जाती है तो उसे कितने में बेचा जाय कि ५% लाभ हो।

क्रय मूल्य = ५२५ रु०

५% से कुल लाभ $= \frac{५}{१००} \times ५२५ = \frac{२६२५}{१००} = २६.२५$ रु०

= २६ रु० २५ पैसा

$\therefore$ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

= ५२५ रु० + २६ रु० २५ पैसा = ५५१ रु० २५ पैसा

उदाहरण ५. एक कलम को १५ रु० में बेचने पर किसी दुकानदार को २०% लाभ होता है तो कलम का क्रय मूल्य बताओ।

मान लिया कलम का मूल्य १०० रु० हैं :

इसलिए २०% लाभ से उसका विक्रय मूल्य = १२० रु०

जब विक्रय मूल्य १२० रु० है तो क्रय मूल्य = १०० रु०

$\therefore$ जब विक्रय मूल्य १५ रु० है तो क्रय मूल्य $= \frac{१५ \times १००}{१२०} = \frac{२५}{२}$ रु०

= १२ रु० ५० पैसा

अतः कलम का क्रय मूल्य १२ रु० ५० पैसे है।

दूसरी विधि : मान लिया क्रय मूल्य य रु० है।

$\therefore$ २०% से कुल लाभ $= \frac{२०}{१००} \times य = \frac{य}{५}$ रु०

$\therefore$ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

$१५ = य + \frac{य}{५} = \frac{६ य}{५}$

$\therefore य = \frac{१५ \times ५}{६} = \frac{२५}{२}$ रु० = १२ रु० ५० पैसे

उदाहरण ६. एक घड़ी को यदि १४४ रु० में बेचा जाता तो १०% हानि होती तो उसे कितने में बेचा जाय कि १५% लाभ हो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया घड़ी का क्रय मूल्य १०० रु० है।

∴ १०% से कुल हानि = १० रु०

∴ विक्रय मूल्य = १०० − १० = ९० रु०

जब विक्रय मूल्य ९० रु० है तो क्रय मूल्य = १०० रु०

∴ जब विक्रय मूल्य १४४ रु० है तो क्रय मूल्य $= \frac{१४४ \times १००}{९०} =$ १६० रु०

१५% से १६० रु० पर कुल लाभ $= \frac{१५}{१००} \times १६० =$ २४ रु०

∴ विक्रय मूल्य = १६० रु० + २४ रु० = १८४ रु०

उदाहरण ७. एक किसान को गेहूँ, गन्ना और आलू के उपजाने में क्रमशः ४००० रु०, ३५०० रु० और २५०० रु० व्यय करना पड़ता है। पैदावार से उसे गेहूं पर १०% और गन्ना पर १५% लाभ होता हैं तथा आलू पर ५% हानि होती है तो उपज के कुल व्ययं पर उसे कितने प्रतिशत लाभ अथवा हानि होती है।

गेहूँ से १०% सें ४००० रु० पर कुल लाभ $= \frac{१०}{१००} \times ४००० =$ ४०० रु०

गन्ने से १५% से ३५०० रु० पर कुल लाभ $= \frac{१५}{१००} \times ३५०० =$ ५२५ रु०

आलू से ५% से २५०० रु० पर कुल हानि $= \frac{५}{१००} \times २५०० =$ १२५ रु०

अतः कुल लाभ = ४०० रु० + ५२५ रु० − १२५ रु०

= ८०० रु०

कुल लागत = ४००० रु० + ३५०० + २५०० रु० = १०००० रु०

∴ कुल व्यय पर प्रतिशत लाभ $= \frac{८००}{१००००} \times १०० =$ ८%

उदाहरण ८. मोहन ने एक मोटर साइकिल कुछ रुपये में खरीदा और उस पर ५% लाभ लेकर अनिल के हाथ बेचा। अनिल ने १५% लाभ लेकर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उसको सुनील के हाथ बेच दिया। एक साल प्रयोग में लाने के बाद सुनील १०% घाटे से ४३४७ रु० में बेच देता है। तो बताओ कि मोहन ने उसे कितने में खरीदा था।

मान लिया मोहन ने मोटर साइकिल १०० रु० में खरीदा था।

५% लाभ से मोहन द्वारा लिया गया मूल्य=१०५ रु०

अब अनिल का क्रय मूल्य=१०५ रु०

१५% लाभ से अनिल द्वारा लिया गया मूल्य $=\frac{११५}{१००}\times १०५$

$=\frac{४८३}{४}$ रु०

∴ सुनील का क्रय मूल्य $=\frac{४८३}{४}$ रु०

१०% घाटे से सुनील द्वारा लिया गया मूल्य $=\frac{९०}{१००}\times\frac{४८३}{४}=\frac{४३४७}{४०}$ रु०

जब सुनील का विक्रय मूल्य $\frac{४३४७}{४०}$ रु० है तो मोहन का क्रय मूल्य=१०३ रु०

∴ " " ४३४७ रु० " "

$=\frac{४०\times१००\times४३४७}{४३४७}$

= ४००० रु०

अतः मोहन का क्रय मूल्य=४००० रु०

उदाहरण ६. एक व्यापारी ४ रु० में ५ रुमाल खरीदता है और ५ रु० में ४ रुमाल के भाव से बेचता है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

५ रुमाल का क्रय मूल्य=४ रु०

∵ ४ रुमाल का विक्रय मूल्य=५ रु०

∴ ५ रुमाल का विक्रय मूल्य $=\frac{५\times५}{४}=\frac{२५}{४}$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ ४ रु० पर कुल लाभ $= \frac{२५}{४} - ४ = \frac{९}{४}$ रु०

∴ १०० रु० पर लाभ $= \frac{१००}{४} \times \frac{९}{४} = \frac{२२५}{४}$ रु०

$= ५६\frac{१}{४}$ ०

अतः अभीष्ट लाभ $= ५६\frac{१}{४}\%$

उदाहरण १०. एक कुंजड़ा कुछ संतरे रुपए में ५ के भाव से खरीदता है और उतने ही संतरे रुपए में चार के भाव से खरीदता है। यदि वह इनको २ रुपए में ९ के भाव से बेचता है तो प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात करो।

पहले प्रकार के एक संतरे का क्रय मूल्य $= \frac{१}{५}$ रु०

और दूसरे प्रकार के एक संतरे का क्रय मूल्य $= \frac{१}{४}$ रु०

अतः मिश्रण के दो संतरों का क्रय मूल्य $= \frac{१}{५} + \frac{१}{४} = \frac{९}{२०}$ रु०

मिश्रण के दो संतरों का विक्रग मूल्य $= २ \times \frac{२}{९} = \frac{४}{९}$ रु०

∴ $\frac{९}{२०}$ रु० में हानि $= \frac{९}{२०} - \frac{४}{९} = \frac{८१-८०}{१८०} = \frac{१}{१८०}$ रु०

∴ १०० रु० में हानि $= \frac{१००}{१८०} \times \frac{२०}{९} = \frac{१००}{८१} = १\frac{१९}{८१}$ रु०

अतः हानि $= १\frac{१९}{८१}\%$

प्रश्नावली ४ (क)

१. प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात करो।

(क) क्रय मूल्य = १२५ रु०, विक्रय मूल्य = १३० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) क्रय मूल्य= ५ रु० ५० पैसा, विक्रय मूल्य = ४ रु० ९५ पैसे
(ग) क्रय मूल्य= ५२५ रु०, विक्रय मूल्य = ६०० रु०
(घ) क्रय मूल्य=६२ रु० ५० पैसा, विक्रय मूल्य=६० रु०

२. विक्रय मूल्य ज्ञात करो।
(क) क्रय मूल्य=१५०० रु०, लाभ=१२%
(ख) क्रय मूल्य=२२५ रु०, हानि=१६%
(ग) क्रय मूल्य= १० रु० ५० पैसा, लाभ=१०%
(घ) क्रय मूल्य=३०० रु०, हानि=३३ $\frac{१}{३}$%

३. क्रय मूल्य ज्ञात करो।
(क) विक्रय मूल्य=१६५ रु०, लाभ=१०%
(ख) विक्रय मूल्य=३६ रु०, हानि=२८%
(ग) विक्रय मूल्य=६ रु० २५ पैसा, लाभ=२५%
(घ) विक्रय मूल्य=१६० रु० हानि=२०%

४. एक बनिया २० क्विन्टल गेहूँ, ७५ रु० प्रति क्विन्टल के भाव से खरीदता है और उसे १८०० रु० में बेच देता है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

५. एक व्यापारी ३०० रु० में एक घड़ी खरीदता है और ३५० रु० में बेच देता है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

६. एक खटिक २०० क्विन्टल आलू २५ रु० प्रति क्विन्टल के भाव से खरीदता है। उसमें से १० क्विन्टल आलू सड़ जाता है। तो बचे हुए आलू को किस भाव से बेचे कि उसे लागत पर १४% लाभ हो?

७. किसी रेडियो का क्रय मूल्य ५२५ रु० है तो उसे कितने में बेचा जाय कि ४% लाभ हो?

८. एक कुर्सी को २२ रु० में बेचने पर व्यापारी १२% हानि सहता है तो कुर्सी का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

९. एक छाते को १२ रु० ५० पैसे में बेचने पर २५% लाभ होता है तो उसका क्रय मूल्य बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. एक दुकानदार १० रु० में ११ कंघी खरीदता है और ११ रु० में १० कंघी बेचता है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

११. एक दुकानदार २४ रु० में २५ मीटर कपड़ा खरीदता है और २५ रु० में २४ मीटर कपड़ा बेचता है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

१२. एक तरकारी बेचने वाला तरकारी को क्रय मूल्य पर ही बेचता है किन्तु तौलने में एक किलोग्राम के स्थान पर ९०० ग्राम ही देता है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

१३. एक व्यापारी एक मोटर साइकिल को ५४५० रु० में बेचता है तो उसे ९% लाभ होता है। तो उसे वह कितने में बेचे कि उसे १३% का लाभ हो ?

१४. एक घोड़े को यदि ८१० रु० में बेचा जाता तो १०% घाटा होता। उसे कितने में बेचा जाय कि १५% लाभ हो ?

१५. एक मकान को यदि ६६५० रु० में बेचा जाता तो ५% हानि होती तो १२% लाभ के लिए उसे कितने में बेचा जाय ?

१६. एक बैल को ४५० रु० में बेचने पर जितने प्रतिशत हानि होती है उसी को ५५० रु० में बेचने पर उतने ही प्रतिशत लाभ होता है। तो क्रय मूल्य बताओ।

१७. एक व्यापारी तीन मोटर कार क्रमशः २०००० रु०, २४००० रु० और ४०००० रु० में खरीदता है। पहली कार पर उसे १५% लाभ, दूसरी पर २०% हानि होती है तो तीसरी को कितने में बेचे कि कुल पर १०% लाभ हो ?

१८. किसी कारीगर ने एक बनारसी साड़ी थोक व्यापारी के हाथ १०% लाभ पर बेची। थोक व्यापारी ने फुटकर व्यापारी को २०% लाभ पर बेची और फुटकर व्यापारी ग्राहक को २५% लाभ लेकर १६५ रु० में बेच देता है। तो कारीगर की लागत बताओ।

१९. एक सिलाई मशीन बनाने के कारखाने का मालिक थोक व्यापारियों को २५% लाभ पर मशीनें बेचता है और थोक व्यापारी १२% लाभ लेकर फुटकरव्यापारी को बेचता है और फुटकर व्यापारी ग्राहक को किसी

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

कारण वश १०% हानि सह कर बेच देता है। यदि एक मशीन के बनाने की लागत २०० रु० है तो ग्राहक को उस मशीन का कितना मूल्य देना पड़ा ?

२०. एक आदमी कुछ अण्डे रुपये में ४ के भाव से और उतने ही अन्डे रुपये में ३ के भाव से खरीदता है। यदि उनको २ रु० में ७ के भाव से बेचता है तो प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात करो।

२१. एक गड़रिया १० भेड़ें ४५० रु० में खरीदता है और उनको एक महीने तक रखता है जिन पर कुल ५० रु० खर्च पड़ता है। यदि २ भेड़ें मर जाती हैं तो प्रति भेड़ किस भाव से बेचे कि उसको २०% लाभ हो ?

२२. एक खटिक को १ रु० में १० के भाव से आम बेचने में $१६\frac{२}{३}\%$ हानि होती है तो १ रु० में कितना आम बेचे कि $६६\frac{२}{३}\%$ लाभ हो ?

२३. एक व्यापारी कुछ गुड़ खरीदता है। उसका $\frac{३}{४}$ भाग २०% लाभ पर बेचता है और शेष को १२% हानि पर बेचता है। यदि उसको कुल ४८ रु० का लाभ होता है तो उसने कितने रुपये का गुड़ खरीदा था ?

विविध प्रश्न

उदाहरण १. एक रेडियो कम्पनी अपनी वस्तुओं के विज्ञापित मूल्य पर १०% कमीशन देकर भी १५% लाभ उठाती है। उस रेडियो का विज्ञापित मूल्य ज्ञात करो जिस पर कम्पनी को ४० रु० ५० पै० का लाभ होता है। रेडियो का वास्तविक मूल्य भी ज्ञात करो।

जब १५% रु० लाभ है तो क्रय मूल्य = १०० रु०

$\therefore$ जब ४० रु० ५० ,, ,, $= \frac{१००}{१५} \times ४०\cdot५ = २७०$ रु०

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ = २७० + ४०·५ = ३१०·५ रु०

जब विक्रय मूल्य (१०० − १०) अर्थात् ९० रु० है तो विज्ञापित मूल्य = १०० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ जब विक्रय मूल्य ३१०·५ रु० है तो विज्ञापित मूल्य

$$=\frac{१००}{९०}\times ३१०·५ \text{ रु०}$$

$$= ३४५ \text{ रु०}$$

उत्तर—विज्ञापित मूल्य = ३४५ रु०

क्रय मूल्य = २७० रु०

उदाहरण २. गुप्ता ब्रदर्स एक मोटर साइकिल को २०% लाभ पर बेचता है। वह विक्रय मूल्य को कितने प्रतिशत बढ़ा दे कि उसे २६% लाभ हो ?

मान लिया एक मोटर साइकिल का क्रय मूल्य १०० रु० है।

∴ २०% लाभ से बेचने पर विक्रय मूल्य = (१०० + २०) = १२० रु०

और २६% „ „ „ = (१०० + २६) = १२६ रु०

∴ विक्रय मूल्य में वृद्धि = ६ रु०

∵ १२० रु० विक्रय मूल्य में वृद्धि = ६ रु०

∴ १०० रु० „ „ $= \frac{६ \times १००}{१२०} = ५$ रु०

५% उत्तर

उदाहरण ३. यदि १० घड़ियों का विक्रय मूल्य ११ घड़ियों के क्रय मूल्य के बराबर हो, तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

मान लिया ११ घड़ियों का क्रय मूल्य = १०० रु०

∴ १० घड़ियों का विक्रय मूल्य = १०० रु०

∴ ११ „ „ $= \frac{१००}{१०} \times ११ = ११०$ रु०

∴ १०० रु० पर लाभ = (११० − १००) = १० रु०

लाभ १०% उत्तर

उदाहरण ४. यदि १५० आमों को बेचने से २५ आमों के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है तो लाभ प्रतिशत बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∵ १५० आमों के बेचने से २५ आमों के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है।
∴ १५० आमों का विक्रय मूल्य = १७५ आमों का क्रय मूल्य
अब मान लिया १७५ आमों का क्रय मूल्य = १०० रु०
∴ १५० आमों का विक्रय मूल्य = १०० रु०

$$\therefore \text{ १७५ आमों का विक्रय मूल्य} = \frac{१०० \times १७५}{१५०} \text{ रु०}$$

$$= \frac{३५०}{३} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{ १०० रु० पर लाभ} = \frac{३५०}{३} - १०० = \frac{५०}{३} = १६\frac{२}{३} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{ उत्तर लाभ} = १६\frac{२}{३}\%$$

उदाहरण ५. रेडियो का एक दुकानदार जब ५० रेडियो बेचता है तो उसे ४ रेडियो के विक्रय मूल्त का लाभ होता है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

मान लिया १ रेडियो का विक्रय मूल्य = १०० रु०
∴ ५० रेडियो का विक्रय मूल्य = ५० × १०० = ५००० रु०
और ४ „ „ = ४ × १०० = ४०० रु०
∴ ५००० रु० विक्रय मूल्य पर लाभ = ४०० रु०
∴ क्रय मूल्य = ५००० − ४०० = ४६०० रु०
∵ ४६०० रु० पर लाभ = ४०० रु०

$$\therefore \text{ १०० रु० „} = \frac{४०० \times १००}{४६००} = \frac{२००}{२३} = ८\frac{१६}{२३} \text{ रु०}$$

$$\text{उत्तर लाभ} = ८\frac{१६}{२३}\%$$

उदाहरण ६. एक चालाक बनिया अपने खराब तराजू से इस प्रकार सामानों को तौलता है कि माल खरीदने तथा बेचने दोनों में १०% फायदा करता है तो उसे कितने प्रतिशत लाभ होता है ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया बनिया १०० रु० का माल खरीदता है।

अपने खराब तराजू से १००रु० के माल के बदले ११०रु० का माल लेता है।

इसी प्रकार वेचते समय १०० रु० के माल को ११० रु० में बेचता है।

$$\therefore \text{ ११० रु० के माल का विक्रय मूल्य} = \frac{११० \times ११०}{१००} = १२१ \text{ रु०}$$

अतः १०० रु० लगाने पर बनिया (१२१ − १००) = २१ रु० लाभ पा जाता है।

$\therefore$ लाभ = २१% उत्तर

उदाहरण ७. एक सिलाई की मशीन २०% लाभ पर वेची जाती है। यदि क्रय मूल्य ५% कम होता और विक्रय मूल्य ३१ रु० कम लेता तो उस पर १०% लाभ होता। मशीन का क्रय-मूल्य बताओ।

मान लिया सिलाई की मशीन का क्रय मूल्य = १०० रु०

$\therefore$ २०% लाभ से विक्रय मूल्य = १२० रु०

यदि क्रय मूल्य ५% कम हो जाता है तो क्रय मूल्य = ९५ रु०

$$\text{अब ९५रु० की मशीन का १०\% लाभ से विक्रय मूल्य} = \frac{११० \times ९५}{१००} = \frac{२०९}{२} \text{ रु०}$$

$$\text{दोनों विक्रय मूल्य का अन्तर} = १२० - \frac{२०९}{२} = \frac{३१}{२} \text{ रु०}$$

$\because$ जब अन्तर $\frac{३१}{२}$ रु० है तो क्रय मूल्य = १०० रु०

$\therefore$ „ ३१ रु० „ „ = २०० रु०

२०० रु० उत्तर

द्वितीय विधि

मान लिया सिलाई की मशीन का क्रय मूल्य = य रु०

$$\therefore \text{ २०\% लाभ से विक्रय मूल्य} = \frac{१२०}{१००} \text{ य} = \frac{६}{५} \text{ य रु०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५% कमी होने पर क्रय मूल्य $= \frac{९५}{१००}$ य $= \frac{१९}{२०}$ य रु०

$\frac{१९}{२०}$ य क्रय मूल्य पर १०% लाभ से विक्रय मूल्य $= \frac{११०}{१००} \times \frac{१९}{२०}$ य

$= \frac{२०९}{२००}$ य रु०

विक्रय मूल्यों का अन्तर $= \frac{६}{५}$य $- \frac{२०९}{२००}$य $=$ ३१

या २४० − २०९ य = ३१ × २००

३१ य = ३१ × २००

य = २०० रु०

२०० रु० उत्तर

उदाहरण ८. सतीश ने अपनी गाय कुछ लाभ लेकर ५०० रु० में बेची। यदि वह उसे ४२५ रुपये में बेचता तो उसे वर्तमान लाभ का $\frac{१}{२}$ हानि उठानी पड़ती। गाय का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

मान लिया गाय का क्रय मूल्य = य रु०

∴ ५०० रु० में बेचने पर लाभ = (५०० − य) रु०

और ४२५ रु० में बेचने पर हानि = (य − ४२५) रु०

प्रश्नानुसार, $\frac{१}{२}$ (५०० − य) = य − ४२५

∴ ५०० − य = २ य − ८५०

∴ ३ य = १३५०

∴ य = ४५० रु०

उत्तर − ४५० रु०

उदाहरण ९. एक कुर्सी को २४ रु० में बेचने से किसी व्यापारी को उतने प्रतिशत लाभ होता है जितने रुपये उसका क्रय मूल्य है तो कुर्सी का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

मान लिया कुर्सी का क्रय मूल्य = य रु०

∴ लाभ = य%

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\therefore \text{कुल लाभ} = \frac{\text{य}}{१००} \times \text{य} = \frac{\text{य}^2}{१००} \text{ रु०}$$

$$\text{अत : विक्रय मूल्य} = \left(\text{य} + \frac{\text{य}^2}{१००} \right) \text{रु०}$$

$$\therefore \quad \text{य} + \frac{\text{य}^2}{१००} = २४$$

या $\quad १०० \text{ य} + \text{य}^2 = २४००$

या $\quad \text{य}^2 + १००\text{य} - २४०० = ०$

या $\quad (\text{य} + १२०)(\text{य} - २०) = ०$

$\therefore \text{य} = -१२०, २०$

किन्तु मूल्य (– १२०) अर्थात् ऋणात्मक नहीं हो सकता,

∴ कुर्सी का क्रय मूल्य = २० रु० उत्तर

उदाहरण १०. १२ रु० प्रति कीलो तथा १४ प्रति कीलो के घी किस अनुपात में मिला दिये जायें कि मिश्रण को १३ रु० प्रति कीलो की दर से बेचने पर ४% का लाभ हो।

मान लिया

१२ रु० प्रति कीलो का य कीलो घी

तथा १४ रु० „ „ र „ „

मिला दिये जाते हैं।

(य + र) कीलो घी का क्रय मूल्य = (१२ य + १४ र) रु०

(य + र) कीलो मिश्रण का विक्रय मूल्य = (य + र) × १३ रु०

४% लाभ से १०० रु० के घी का विक्रय मूल्य = १०० + ४ = १०४ रु०

∴ (१२ य + १४ र) रु० के घी का विक्रय मूल्य

$$= (१२\text{य} + १४\text{र}) \frac{१०४}{१००} \text{ रु०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ (१२ य + १४ र) $\frac{१०४}{१००}$ = (य + र) १३

या १२४८ य + १४५६ र = १३०० य + १३०० र

या ५२ य = १५६ र

$\therefore$ $\frac{य}{र} = \frac{१५६}{५२} = \frac{३}{१}$

अतः अभीष्ट अनुपात = ३ : १ उत्तर

उदाहरण ११. रामदीन ने बैल ४८९५ रु० प्रति बैल की दर से बेचा। पहले बैल पर उसे १० % का लाभ तथा दूसरे पर १० % की हानि हुई। कुल लागत पर उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई?

पहले बैल पर लाभ = १० %

अतः ११० रु० विक्रय मूल्य पर क्रय मूल्य = १०० रु०

$\therefore$ ४९५ रु० ,, ,, = $\frac{१०० \times ४९५}{११०}$ = ४५० रु०

दूसरे बैल पर हानि = १०%

अतः ९० रु० विक्रय मूल्य पर क्रय मूल्य = १०० रु०

$\therefore$ ४९५ रु० ,, ,, = $\frac{१००}{९०} \times$ ४९५ = ५५० रु०

$\therefore$ दोनों बैलों का क्रय मूल्य = ४५० + ५५० = १००० रु०

तथा दोनों बैलों का विक्रय मूल्य = ४९५ × २ = ९९० रु०

$\therefore$ लाभ = १० रु०

$\because$ १००० रु० पर लाभ = १० रु०

$\therefore$ १०० रु० ,, ,, = १ रु०

अतः लाभ = ५ % उत्तर

उदाहरण १२. एक व्यापारी ने ४ गायें और ५ बैल २३०० रु० में खरीदा और गायों को १० % लाभ पर तथा बैलों को २० % लाभ पर बेचा। इस प्रकार उसको ३८० रु० का लाभ रहा तो एक गाय तथा एक बैल का औसत क्रय मूल्य बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मान लिया एक गाय का औसत क्रय मूल्य = ४ य रु०

∴ ४ गायों का क्रय मूल्य = ४य रु०

∴ ५ बैलों का क्रय मूल्य = (२३०० − ४ य) रु०

अब १० % लाभ से ४ गायों पर लाभ $= \frac{१०}{१००} \times ४य = \frac{२ य}{५}$ रु०

और २० % लाभ से ५ बैलों पर लाभ $= (२३०० - ४ य)\frac{२०}{१००}$

$= \frac{१}{५}(२३०० - ४ य)$ रु०

अतः प्रश्न के अनुसार

$\frac{२य}{५} + \frac{१}{५}(२३०० - ४ य) = ३८०$

या २ य + २३०० − ४ य = १९००

या २ य = ४००

∴ य = २०० रु०

अतः एक गाय का क्रय मूल्य = २०० रु०

∴ ५ बैलों का क्रय मूल्य = (२३०० − ४ य) = (२३०० − ४ × २००)

= १५०० रु०

∴ १ बैल का क्रय मूल्य $= \frac{१५००}{५} = ३००$ रु०

उत्तर—एक गाय का क्रय मूल्य = २०० रु०

एक बैल का क्रय मूल्य = ३०० रु०

उदाहरण १३. यदि संतरों का मूल्य २५% कम हो जाता है तो एक मनुष्य १५ रु० में २० संतरे अधिक खरीद सकता है तो संतरों की वर्तमान दर तथा घट जाने के बाद की दर बताओ।

मान लिया १ संतरे का वर्तमान मूल्य य रु० है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ १५ रु० में रु० य रु० प्रति संतरा की दर से खरीदे गये संतरों की संख्या $= \frac{१५}{य}$ रु०

२५% कम हो जाने पर १ संतरे का मूल्य $= \frac{७५}{१००} य$

$= \frac{३}{४}$ य रु०

∴ १५ रु० में क्रय किये गये संतरों की संख्या $= \frac{१५ \times ४}{३ य} = \frac{२०}{य}$

अतः प्रश्नानुसार $\frac{२०}{य} - \frac{१५}{य} = २०$

या २० − १५ = २० य

∴ २० य = ५

∴ $य = \frac{५}{२०} = \frac{१}{४}$ रु० = २५ पै०

∴ एक संतरे का वर्तमान मूल्य = २५ पै०

∴ एक संतरे का घटा हुआ मूल्य $= \frac{७५}{१००} \times २५ = \frac{७५}{४} = १८\frac{३}{४}$ पै०

उत्तर—२५ पै०, १८ $\frac{३}{४}$ पै०

उदाहरण १४. राम ने एक घड़ी श्याम को कुछ प्रतिशत हानि पर बेचा, और श्याम ने उसे उतने ही प्रतिशत हानि पर शिव को बेचा और राम ने उसे शिव से उतने ही दाम पर फिर खरीदा जितने में उसने पहले खरीदा था। इस प्रकार शिव को २१% का लाभ होता है। तो राम ने उसे कितने प्रतिशत हानि पर बेचा था।

मान लिया राम ने घड़ी १०० रु० में खरीदी थी तथा उसे य% हानि पर श्याम को बेचा था।

य% हानि से राम ने घड़ी को श्याम को (१०० −य) रु० में बेचा।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पुनः य% हानि से श्याम ने उसे शिव को $\frac{(१००-य)(१००-य)}{१००}$ रु० में वेचा। शिव ने फिर राम को उसे राम के पहले क्रय मूल्य अर्थात् १०० रु० पर वेचा।

∵ शिव को २१% का लाभ रहा; इसलिए उसका विक्रय मूल्य

$$= \frac{(१००-य)^२}{१००} \times \frac{१२१}{१००} \text{ रु०}$$

अतः प्रश्नानुसार

$$\frac{(१००-य)^२}{१००} \times \frac{१२१}{१००} = १००$$

$$\therefore (१००-य)^२ = \frac{१००००००}{१२१}$$

$$\text{या } १००-य = \frac{१०००}{११}$$

$$\therefore य = १०० - \frac{१०००}{११} = \frac{१००}{११} = ९\frac{१}{११}\%$$

उत्तर—$९\frac{१}{११}$ %हानि

प्रश्नावली ४ (ख)

१. एक दूकानदार अपनी सामग्री के विज्ञापित मूल्य पर २५% कमीशन देता है और फिर भी उसे २०% लाभ होता है। उस सामग्री का विज्ञापित मूल्य बताओ जिस पर दूकानदार को ५रु० लाभ होता है। सामग्री का वास्तविक मूल्य भी बताओ।

२. एक प्रकाशक अपनी पुस्तकों के छपे मूल्य पर २०% कमीशन पुस्तक विक्रेताओं को देता है। एक पुस्तक का छपा हुआ मूल्य १० रु० है और उसे बेचने से पुस्तक विक्रेता को १ रु० लाभ होता है तो पुस्तक विक्रेता को अपनी लागत पर कितने प्रतिशत लाभ होता है ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. एक दवा का एजेन्ट अपने दवाओं का मूल्य क्रय मूल्य से २०% अधिक रखता है और अपने ग्राहकों को १०% कमीशन देता है। बताओ उसको कितने प्रतिशत लाभ होता है ?

४. एक व्यापारी अपनी कापियों का दाम लागत के दाम से कितने प्रतिशत बढ़ाकर रखे कि ग्राहकों को १०% कमीशन देकर भी ५% लाभ हो ?

५. एक पुस्तक को छपे मूल्य से ५% घटा कर बेचने से एक दूकानदार को २४% की हानि होती है। तो उसे छपे मूल्य पर बेचने से कितने प्रतिशत हानि होगी ?

६. शारदा फार्मेसी अपने दवाओं का विज्ञापित मूल्य ५% बढ़ा देती है तो उसको २६% लाभ होता है। बताओ कि विज्ञापित मूल्य पर बेचने से कितने प्रतिशत लाभ होगा ? एक बोतल अर्क का विज्ञापित मूल्य ४ रु० ८० पै० है तो उसका क्रय मूल्य ज्ञात करो। (२०% ४ रु०)

७. कुछ खराब होने के कारण एक खटिक खरबूजों का दाम बाजार भाव से १०% कम करके बेचता है फिर भी उसे २०% का लाभ होता है। यदि खरबूजे का क्रय मूल्य ५० पै० प्रति कीलो है तो उसका बाजार भाव बताओ।

८. एक छड़ी को बेचने से ५०% लाभ होता है। बताओ कि छड़ी का विक्रय मूल्य कितने प्रतिशत कम कर दिया जाय कि उस पर न तो लाभ हो न हानि ?

९. २० संतरों का विक्रय मूल्य २१ संतरों के क्रय मूल्य के बराबर है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

१०. एक कुंजड़ा ५०० आम खरीदता है किन्तु ५० आम सड़ जाते हैं। शेष आमों को बेचने से उसे न लाभ होता है और न हानि। यदि आम न सड़ते तो उसे कितने प्रतिशत लाभ होता ?

११. २५ फाउन्टेन पेनों का विक्रय मूल्य ३० फाउन्टेन पेनों के क्रय मूल्य के बराबर है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१२. ६ दर्जन अंडों का विक्रय मूल्य ५ दर्जन अंडों के क्रय मूल्य से २५% अधिक है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

१३. २० घड़ियों को बेचने से एक व्यापारी को ३ घड़ियों के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

१४. एक कलम का विक्रय मूल्य ५ रु० है। एक दूकानदार को २५० कलमों के बेचने पर ५० कलमों के क्रय मूल्य का लाभ होता है तो लाभ प्रतिशत तथा एक कलम का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

१५. यदि १२५ टोपियों को बेचने से २५ टोपियों के विक्रय मूल्य का लाभ होता है तो लाभ प्रतिशत बताओ।

१६. रामदीन बनिया को ५० क्विटल गेहूँ बेचने पर ६ क्विटल गेहूँ के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है तो प्रतिशत लाभ बताओ। यदि १ क्विटल गेहूँ का विक्रय मूल्य ७५ रु० है तो क्रय मूल्य क्या है !

१७. एक व्यापारी को ३०० बिजली के बल्वों को बेचने से २० बल्वों के विक्रय मूल्य के बराबर हानि होती है तो हानि प्रतिशत बताओ।

१८. एक व्यापारी माल खरीदने तथा बेचने दोनों में ५% की बेईमानी करता है तो उसे कितने प्रतिशत लाभ होता है ?

१९. राम निहोर बनिया का कीलो का बाट ९८० ग्राम के ही बराबर है। बताओ कुछ माल बेचने में उसे कितने प्रतिशत का लाभ होगा ?

२०. एक व्यापारी माल को जिस भाव पर खरीदता है उसी भाव पर बेचता है किन्तु अपने अशुद्ध बाटों का प्रयोग करके सामान खरीदने तथा बेचने दोनों में १५% का लाभ करता है तो उसका लाभ प्रतिशत बताओ।

२१. एक बनिया शक्कर १०% लाभ पर बेचता है और तौलने में १०% कम तौलता है। तो उसे कितने प्रतिशत लाभ होता है ?

२२. एक बिजली का पंखा १५% लाभ पर बेचा जाता है। यदि उसका क्रय मूल्य १०% अधिक होता और वह ७ रु० अधिक दाम पर बेचा जाता तो १२ $\frac{१}{२}$% लाभ होता तो पंखे का क्रय मूल्य बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२३. एक छाता २०% लाभ पर बेचा जाता है। यदि उसका क्रय मूल्य ४ रु० कम होता और विक्रय मूल्य ८$\frac{1}{3}$% कम होता तो ३७$\frac{1}{2}$% लाभ होता। तो छाते का क्रय मूल्य बताओ।

२४. सावित्री ने अपनी अंगूठी १५% हानि पर बेची। यदि उसे अंगूठी खरीदने में ५० रु० कम देना पड़ा होता और बेचने में ५ रु० अधिक मिलता तो उसे ४% का लाभ होता। तो अंगूठी का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

२५. श्याम ने अपनी घड़ी १५० रु० में कुछ लाभ पर बेची। यदि वह उसे ११० रुपये में बेचता तो वर्तमान लाभ का तिगुना हानि उठानी पड़ती तो घड़ी का क्रय मूल्य बताओ।

२६. एक दिवालिये का सामान ४५०० में नीलाम हुआ। यदि नीलाम की बोली $\frac{1}{८६}$ बढ़ जाती तो हानि पहली हानि की $\frac{२}{३}$ ही रह जाती। सामान का मूल्य क्या था ?

२७. एक जोड़ी बैलों का विक्रय मूल्य ११०० रु० है। और १०% लाभ होता है। यदि दोनों के विक्रय मूल्यों में २:३ का अनुपात है तो दोनों का क्रय मूल्य अलग-अलग ज्ञात करो।

२८. एक धोती को ११ रु० में बेचने में किसी व्यापारी को इतने प्रतिशत लाभ होता है जितने रुपये उसका क्रय मूल्य है। तो धोती का क्रय मूल्य बताओ।

२९. एक पुस्तक को ४ रु० ७५ पै० में बेचने से एक लड़के को उतने प्रतिशत हानि होती है जितने रुपये उसका क्रय मूल्य है। तो पुस्तक का क्रय मूल्य बताओ।

३०. एक मेज को ४३ रु० ७५ पै० में बेचने से उसके क्रय मूल्य के चौथाई प्रतिशत की हानि होती है। तो क्षेत्र का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

३१. ५ रु० २५ पै० प्रति कीलों तथा ४ रु० प्रति कीलो की मिठाइयाँ किस अनुपात में मिला दी जायें कि मिश्रण को ५ रु० प्रति कीलो की दर से बेचने से ११$\frac{1}{9}$% का लाभ हो ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३२. एक प्रकार का आम ८ रु० सैकड़ा तथा दूसरे प्रकार का १३ रु० सैकड़ा मिलता है। बताओ कि घटिया प्रकार के ६०० आमों को बढ़िया प्रकार के कितने आमों के साथ मिलाकर मिश्रण को १२ रु० सैकड़ा की दर से बेचा जाय कि २०% का लाभ हो ?

३३. एक दूकानदार दो प्रकार के चावल बाजार से क्रय करके उन्हें ३ : ४ के अनुपात में मिलाकर ५८ रु० का ४० कीलो की दर से बेचकर ३$\frac{४}{६}$% लाभ कमा लेता है। यदि पहले प्रकार का चावल ६० रु० का ४० कीलो खरीदा गया था तो दूसरे प्रकार के चावल का भाव बताओ।

३४. एक व्यापारी ने दो रेडियो ५०० रु० प्रति रेडियो की दर से बेचा। एक पर उसे २५% लाभ तथा दूसरे पर २० % हानि हुई। तो कुल लागत पर प्रतिशत लाभ या हानि बताओ।

३५. बरेली फर्नीचरमार्ट ने दो सोफा सेट ७०० रु० की लागत से तैयार किया। पहले सेट को १०% हानि तथा दूसरे को २० % लाभ से बेचने पर दोनों के बराबर मूल्य मिले। तो दोनों सोफा सेटों की अलग-अलग लागत बताओ।

३६. एक आदमी ने एक गाड़ी तथा घोड़ा ७८० रु० में बेचा तो गाड़ी पर २५% और घोड़े पर १०% लाभ हुआ। यदि वह दोनों को ७७१ रु० में बेचता तो गाड़ी पर १०% और घोड़े पर २५% लाभ होता। गाड़ी तथा घोड़े का क्रय मूल्य बताओ।

३७. एक किसान ने एक जोड़ी बैल खरीदा जिसमें एक बैल का मूल्य दूसरे से ५० रु० अधिक है। उसने पहले बैल को १६% लाभ पर तथा दूसरे को ७ % लाभ पर बेच दिया और इस प्रकार १०० रु० के लाभ में रहा। तो प्रत्येक बैल का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

३८. एक पुस्तक को छपे मूल्य के आधे दाम पर बेचने से १२$\frac{१}{२}$% हानि होती है तो उसको छपे मूल्य पर बेचने से कितने प्रतिशत लाभ होगा ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३९. ६ कुर्सियों तथा ८ मेजों का क्रय मूल्य ३०० रु० है। उनको ३७० रु० में बेचने से कुर्सियों पर २५% लाभ तथा मेजों पर १०% लाभ होता है। तो एक कुर्सी तथा एक मेज का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

४०. घी का मूल्य २०% कम हो जाने से एक आदमी अब ८० रु० में ८ कीलो घी अधिक खरीद सकता है। तो घी की वर्तमान दर तथा घटी हुई दर ज्ञात करो।

४१. आमों की दर २०% घट जाने से एक कुंजड़ा ५० रु० में १२५ अधिक क्रय कर सकता है तो आमों की घटी हुई दर तथा वास्तविक दर निकालो।

४२. एक बनिये के पास ३०० रु० का गल्ला है। वह एक तिहाई गल्ला १०% हानि पर बेच देता है। बताओ वह विक्रय दर को कितने प्रतिशत बढ़ा दे कि शेष को उस दर पर बेच कर कुल माल पर १२% का लाभ हो ?

४३. १० रु०, १२ रु० तथा १५ रु० प्रति कीलो के तीन प्रकार के घी क्रमशः ४ : ५ : ६ के अनुपात में मिलाकर १४ रु० प्रति कीलो की दर से बेचा जाता है तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो।

४४. एक व्यापारी चारा काटने की एक मशीन ४५% लाभ पर बेचता है। यदि मशीन की लागत १० रु० कम होती तथा वह उसे १० रु० कम में बेचता तो उसे ५०% लाभ होता। तो मशीन की लागत तथा पहला विक्रय मूल्य बताओ।

४५. जोखनराम अपना चावल मेवाराम से ५% सस्ता तथा मोती राम से ५% महंगा बेचता है। एक व्यापारी जोखनराम से २००० रु० का चावल खरीदता है यदि वह आधा चावल मेवाराम से तथा आधा मोतीराम से खरीदता तो उसे क्या लाभ या हानि होती ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

5 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

जब किसी धन का ब्याज एक निश्चित अवधि के बाद मूलधन में जोड़ दिया जाता है और इस मिश्रधन पर पुनः ब्याज लगाया जाता है, तो इस प्रकार की ब्याज लगाने की 'पद्धति को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं। मान लो १००० रु० १० प्रतिशत वार्षिक ब्याज पर उधार दिया जाता है। पहले वर्ष के अन्त में ब्याज १०० रु० है। इसको मूलधन १००० रु० में जोड़ दिया जाय तो ११०० रु० हो गया। अब दूसरे साल ११०० रुपये पर ब्याज लगाया जाता है। यह ११० रु० है। अब फिर ब्याज ११० रु० को ११०० को रु० में जोड़ दिया जाता है तो १२१० रु० हो जाता है। अब तीसरे साल १२१० रु० पर ब्याज लगाया जाता है। तीसरे साल का ब्याज १२१ रु० हो गया। इस प्रकार १००० रु० पर पहले साल १०० रु०, दूसरे साल ११० रु० और तीसरे साल १२१ रु० ब्याज मिले। इनका योग ३३१ रु० है। अतः १००० रु० का १० प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ३३१ रु० है।

सामान्यतः चक्रवृद्धि ब्याज लगाते समय १ वर्ष की अवधि पर ब्याज मूलधन में जोड़ दिया जाता है। पर कभी-कभी ६ मास या ३ मास में भी ऐसा किया जाता है। यदि कुछ न किया गया हो तो समझ लेना चाहिये कि एक-एक वर्ष के बाद ब्याज मूलधन में जोड़ दिया जाता है।

उदाहरण १. ८०० रु० का ५ प्रतिशत वार्षिक ब्याज से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज बताओ।

५ प्रतिशत वार्षिक ब्याज से ८०० रु० का एक वर्ष का ब्याज=४० रु०

अब दूसरे वर्ष के लिए मूलधन=८००+४०=८४० रु०

∴ ८४० रु० का १ वर्ष का ब्याज=४२ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अब तीसरे वर्ष के लिये मूलधन $=८४०+४२=८८२$ रु०

$\therefore$ ८८२ रु० का १ वर्ष का ब्याज $=\frac{८८२\times५}{१००}=४४$ रु० १० न०पै०

$\therefore$ ८०० रु० का ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

$=४०$ रु० $+४२$ रु० $+४४$ रु० १० न० पै०

$=१२६$ रु० १० पै०

उदाहरण २. २२५० रु० का ६$\frac{२}{३}$ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से २$\frac{१}{२}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करो।

१०० रु० का १ साल का ब्याज $=\frac{२०}{३}$ रु०

२२५० रु० का १ वर्ष का ब्याज $=\frac{२२५०\times२०}{१००\times३}$

$=१५०$ रु०

$\therefore$ दूसरे साल के लिये मूलधन $=२२५०+१५०=२४००$ रु०

$\therefore$ २४०० रु० का $\frac{२०}{३}$ प्रतिशत दर से १ वर्ष का ब्याज $=\frac{२४००\times२०}{१००\times३}$

$=१६०$ रु०

$\therefore$ तीसरे वर्ष के लिये मूलधन $=२४००+१६०=२५६०$ रु०

$\therefore$ २५६० रु० का $\frac{२०}{३}$ प्रतिशत ब्याज की दर से $\frac{१}{२}$ वर्ष का ब्याज $=$

$$\frac{२५६०\times२०}{१००\times३}\times\frac{१}{२}$$

$=\frac{२५६}{३}$ रु०

$=८५\frac{१}{३}$ रु०

$\therefore$ २२५० रु० का २$\frac{१}{२}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $=१५०+१६०+८५\frac{१}{३}$ रु०

$=३९५\frac{१}{३}$ रु०

टिप्पणी—यदि वर्षों की संख्या भिन्नात्मक है तो केवल उपरोक्त विधि से ही प्रश्न को हल करना चाहिये।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

चक्रवृद्धि ब्याज निकालने की सूक्ष्म विधि :—

मान लो १ रु० ५ प्रतिशत वार्षिक ब्याज पर उधार दिया जाता है।

$$१ \text{ रु० का } १ \text{ वर्ष का ब्याज} = \frac{५}{१००} = \frac{१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\text{पहले वर्ष के अन्त में मिश्रधन} = १ + \frac{१}{२०} = \frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\frac{२१}{२०} \text{ रु० का } १ \text{ वर्ष का ब्याज} = \frac{२१}{२०} \times \frac{५}{१००} = \frac{२१}{२०} \times \frac{१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{ दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन} = \frac{२१}{२०} + \frac{२१}{२०} \times \frac{१}{२०}$$

$$= \frac{२१}{२०}\left(१ + \frac{१}{२०}\right)$$

$$= \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\text{पुनः } \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \text{ रु० का } १ \text{ वर्ष का ब्याज} = \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{५}{१००}$$

$$= \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{ तीसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन} = \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} + \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{१}{२०}$$

$$= \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०}\left(१ + \frac{१}{२०}\right) = \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

इसी प्रकार चौथे वर्ष के अन्त में मिश्रधन $= \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०}$ रु० इत्यादि।

उदाहरण ३—५०० रु० ४ प्रतिशत की दर से $१\frac{१}{२}$ साल का चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जब कि ब्याज छमाही देय है।

$\because$ १०० का १ वर्ष का ब्याज = ४ रु०

$\therefore$ ५०० रु० का ६ माह का ब्याज $= ५०० \times \frac{४}{१००} \times \frac{१}{२} = १०$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ ६ माह के अन्त में मिश्रधन $=५०० + १० = ५१०$ रु०

∴ ५१० रु० का ६ माह का ब्याज $= ५१० \times \frac{४}{१००} \times \frac{१}{२}$

$= \frac{५१}{५}$ रु० $= १०.२$ रु०

∴ १ वर्ष के अन्त में मिश्रधन $= ५१० + १०.२ = ५२०.२$ रु०

∴ ५२०.२ रु० का ६ माह का ब्याज $= ५२०.२ \times \frac{४}{१००} \times \frac{१}{२}$

$= १०.४०४$ रु०

∴ $१\frac{१}{२}$ साल के अन्त में मिश्रधन $= ५२०.२ + १०.४०४$

$= ५३०.६०४$ रु०

∴ ५०० रु० का $१\frac{१}{२}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $= ५३०.६०४ - ५००$

$= ३०.६०४$ रु०

इस प्रकार चाहे जितने वर्ष का मिश्रधन ज्ञात कर सकते हैं।

मान लो समय ३ वर्ष है।

∴ १ का ५ प्रतिशत वार्षिक दर से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन $=$

$\left(\frac{२१}{२०}\right)^3$ या $\left(१ + \frac{१}{२०}\right)^3$

अब मान लो धन ८०० रु० है।

∴ ८०० रु० का ५ प्रतिशत वार्षिक से ३ वर्ष का मिश्रधन $=$

$८०० \left(१ + \frac{१}{२०}\right)^3$

$= ८०० \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०}$

$= ९२६.१$ रु०

$= ९२६$ रु० १० पै०

∴ चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन — मूलधन

$= ९२६$ रु० १० पै० $-$ ८०० रु० $= १२६$ रु० १० पै०

इस प्रकार—चक्रवृद्धि मिश्रधन $=$

मूलधन $\times$ (१रु० का १ वर्ष का मिश्रधन)$^{\text{वर्षों की संख्या}}$

उदाहरण—१०००० रु० का १० प्रतिशत वार्षिक ब्याज से ५ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज बताओ।

∵ १०० रु० का १ वर्ष का ब्याज $= १०$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ १ रु० का १ वर्ष का ब्याज $=\frac{१०}{१००}=\frac{१}{१०}$

∴ १ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन $=१+\frac{१}{१०}=\frac{११}{१०}$ रु०

∴ १०००० रु० का ५ वर्ष का मिश्रधन $=१००००\left(\frac{११}{१०}\right)^{५}$

$=१६१०५\cdot१$ रु०

∴ चक्रवृद्धि ब्याज $=१६१०५\cdot१-१००००=६१०५\cdot१$ रु०

$=६१०५$ रु० १० पै०

चक्रवृद्धि मिश्रधन निकालने का उपयोगी सूत्र :

मान लो—मूलधन = मू

समय = स वर्ष

ब्याज की दर = द प्रतिशत वार्षिक

मिश्रधन = मि

अब १०० रु० का १ वर्ष का ब्याज द रु० है।

१ रु० का १ वर्ष का ब्याज $=\frac{द}{१००}$

∴ १ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन $=१+\frac{द}{१००}$

∴ मू रु० का स वर्ष का द प्रतिशत वार्षिक से मिश्रधन =

$$मू\left(१+\frac{द}{१००}\right)^{स}$$

$$\therefore \quad मि=मू\left(१+\frac{द}{१००}\right)^{स}$$

इस सूत्र में मि, मू, द तथा स चार राशियाँ हैं। इनमें से यदि कोई तीन ज्ञात हों तो चौथी ज्ञात की जा सकती है।

चक्रवृद्धि ब्याज = मि — मू

उदाहरण १. ८१० रु० का $३३\frac{१}{३}$ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से ४ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज निकालो :

यहाँ मू = ८१० रु०

$द=३३\frac{१}{३}=\frac{१००}{३}$

स = ४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अतः सूत्र मि=मू $\left(१+\frac{द}{१००}\right)^{स}$ रु०

$$\therefore \text{ मि}=८१० \left(१+\frac{१००}{३}\times १००\right)^{४}$$

$$=८१०\times\left(\frac{४}{३}\right)^{४}$$

$$=८१०\times\frac{४}{३}\times\frac{४}{३}\times\frac{४}{३}\times\frac{४}{३}$$

$$=२५६० \text{ रु०}$$

चक्रवृद्धिब्याज=मि० − मू०

=२५६० रु० − ८१० रु० = १७५० रु०

टिप्पणी : यदि ब्याज वार्षिक देय न हो तो सूत्र

$$\text{मि०}=\text{मू}\left(१+\frac{द}{१००}\right)^{स}$$

में द=देय अवधि की ब्याज दर।

स=दिये हुये समय में देय अवधियों की संख्या।

उदाहरण २. १७२८ रु० का $८\frac{१}{३}$ प्रतिशत से $१\frac{१}{२}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जब कि ब्याज छमाही जोड़ा जाता है।

इस प्रश्न में,

मू=१७२८ रु०

द=१०० रु० का ६ महीने का ब्याज $=\frac{१}{२}\times\frac{२५}{३}$

स=$१\frac{१}{२}$ वर्ष में छमाहियों की संख्या $=\frac{१८}{६}$

=३

$$\therefore \text{ मि०}=\text{मू०}\left(१+\frac{द}{१००}\right)^{स}$$

$$=१७२८\left(१+\frac{२५}{६\times १००}\right)^{३}$$

$$=१७२८\times\frac{२५}{२४}\times\frac{२५}{२४}\times\frac{२५}{२४}$$

$$=१९५३\cdot१२५ \text{ रु०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ चक्रवृद्धि ब्याज = मि − मू

= १९५३·१२५ − १७२८ रु० = २२५·१२५ रु०

प्रश्नावली ५ (क)

चक्रवृद्धि ब्याज बताओ:—

१. ५००० रु० का ५% की दर से ३ वर्ष का।

२. १०१२५ रु० का ६$\frac{2}{3}$% की दर से ४ वर्ष का।

३. २५६० रु० का ६$\frac{1}{4}$% की दर से ३$\frac{1}{2}$ वर्ष का।

४. १००० रु० का ४% की दर से ३ वर्ष का जब कि ब्याज छमाही देय है।

५. ७२० रु० का ८$\frac{1}{3}$% की दर से २$\frac{1}{2}$ वर्ष का जब कि ब्याज अर्द्ध-वार्षिक देय है।

चक्रवृद्धि मिश्रधन निकालो :—

६. ३२०० का ५% की दर से ३ वर्ष का।

७. ५०० का ४% की दर से २$\frac{1}{2}$ वर्ष का।

८. ८०० का ५% की दर से २$\frac{1}{2}$ वर्ष का जब कि ब्याज अर्द्धवार्षिक देय है।

९. १६०० का ६$\frac{1}{4}$% की दर से १ वर्ष का जब कि ब्याज त्रैमासिक देय है।

१०. किसी धन का ५% की दर से ३ वर्ष का सरल ब्याज १२०० रु० है तो उस धन का उसी दर से उतने ही समय का चक्रवृद्धि ब्याज बताओ।

११. एक आदमी ६४० रु० ७$\frac{1}{2}$% की दर से ३ वर्ष के लिये सरल ब्याज पर उधार देता है। यदि वह चक्रवृद्धि ब्याज पर रुपया देता तो उसे कितना अधिक ब्याज मिलता ?

१२. एक नगर की जनसंख्या २५०००० है तथा हर साल ४% की वृद्धि होती है तो ४ साल बाद जनसंख्या क्या होगी ?

१३. एक वृक्ष की ऊँचाई १.६ मीटर है। यदि उसमें पहले साल १०% दूसरे साल ५% तथा तीसरे साल ४% की वृद्धि होती है तो तीन साल बाद उसकी ऊँचाई क्या हो जायेगी ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१४. १००० रु० का ४% की दर से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज निकालो। जब कि ब्याज त्रैमासिक देय है। इससे ६ वर्ष के अन्त में चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात करो।

चक्रवृद्धि ब्याज पर विलोम प्रश्न :

मूलधन ज्ञात करना:—(१) जब चक्रवृद्धि मिश्रधन, ब्याज की दर तथा समय दिये हों।

यह निम्न उदाहरण से स्पष्ट है :—

उदाहरण १. कितने धन का ५% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ३ वर्ष का ३ वर्ष का मिश्रधन ९२६१ रु० होगा ?

प्रथम विधि :—१०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = ५ रु०

$$\therefore \text{ १ रु० का १ वर्ष का ब्याज} = \frac{५}{१००} = \frac{१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{ १ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन} = १ + \frac{१}{२०} = \frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{ १ रु० का ३ वर्ष का मिश्रधन} = \left(\frac{२१}{२०}\right)^३ \text{ रु०}$$

जब मिश्रधन $\left(\frac{२१}{२०}\right)^३$ रु० है तो मूलधन = १ रु०

$$\therefore \quad ,, \quad \text{१ रु०} \quad ,, \quad ,, = \left(\frac{२०}{२१}\right)^३ \text{ रु०}$$

$$\therefore \quad ,, \quad \text{९२६१ रु०} \quad ,, \quad ,, = \frac{२०}{२१} \times \frac{२०}{२१} \times \frac{२०}{२१} \times ९२६१$$

$$= ८००० \text{ रु० (उत्तर)}$$

द्वितीय विधि :—सूत्र से

$$\text{मि} = \text{मू} \left(१ + \frac{\text{द}}{१००}\right)^{\text{स}}$$

यहाँ मि = ९२६१ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

द = ५%

स = ३ वर्ष

$$\therefore ९२६१ = मू \left(१+\frac{५}{१००}\right)^{३}$$

$$या\ ९२६१ = मू\left(\frac{२१}{२०}\right)^{३}$$

$$\therefore मू = ९२६१ \times \frac{२०}{२१} \times \frac{२०}{२१} \times \frac{२०}{२१}$$

$$= ८००० \text{ रु०}$$

∴ मूलधन = ८००० रु०

(२) जब चक्रवृद्धि ब्याज, दर तथा समय दिये गये हों।

उदाहरण २—किसी धन का $८\frac{१}{३}$% की दर से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज १८७६ रु० है तो धन बताओ।

$$\because १०० \text{ रु० का १ साल का ब्याज} = \frac{२५}{३} \text{ रु०}$$

$$\therefore १ \text{ रु० का १ साल का ब्याज} = \frac{२५}{३ \times १००} = \frac{१}{१२} \text{ रु०}$$

$$\therefore १ \text{ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन} = \left(१+\frac{१}{१२}\right) = \frac{१३}{१२} \text{ रु०}$$

$$\therefore १ \text{ रु० ,, ३ वर्ष ,, ,,} = \frac{१३}{१२} \times \frac{१३}{१२} \times \frac{१३}{१२} = \frac{२१९७}{१७२८} \text{ रु०}$$

$$\therefore १ \text{ रु० का तीन वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज} = \left(\frac{२१९७}{१७२८} - १\right)$$

$$= \frac{४६९}{१७२८} \text{ रु०}$$

जब चक्रवृद्धि ब्याज $\frac{४६९}{१७२८}$ रु० है तो मूलधन = १ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ जब चक्रवृद्धि ब्याज १ रु० हैं तो मूलधन $= \frac{१७२८}{४६९}$ रु०

∴ „ „ १८७६ „ „ $= \frac{१७२८}{४६९} \times १८७६$

$= ६९१२$ रु०

∴ अभीष्ट मूलधन $= ६९१२$ रु०

द्वितीय विधि : चक्रवृद्धि ब्याज $= मू\left(१+\frac{द}{१००}\right)^{स} - मू$

यहाँ च० ब्याज $= १८७६$ रु०

$द = ८\frac{१}{३} = \frac{२५}{३}\%$

$स = ३$ वर्ष

$∴ १८७६ = मू\left(१+\frac{२५}{३\times १००}\right)^{3} - मू$

या $१८७६ = मू \times \left(\frac{१३}{१२}\right)^{3} मू०$

या $१८७६ = मू\left(\frac{१३}{१२}\times\frac{१३}{१२}\times\frac{१३}{१२} - १\right)$

या $१८७६ = मू\left(\frac{४६९}{१७२८}\right)$

$∴ मू = \frac{१८७६\times १७२८}{४६९} = ६९१२$ रु०

मूलधन $= ६९१२$ रु०

प्रश्नावली ५ (ख)

१. कितना धन ५% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ३ वर्ष में २३१५ रु० २५ पैसा हो जायेगा ?

२. किसी धन का $६\frac{१}{४}\%$ से २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ७२२ रु० ५० है तो धन बताओ।

३. यदि किसी धन का १०% की दर से ४ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ७३२० रु० ५० पै० है तो धन बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

४. वह धन बताओ जिसका ६$\frac{२}{३}$% की दर से ४ वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज १४९११ रु० है।

५. वह धन बताओ जिसका १२$\frac{१}{२}$% की दर से २$\frac{१}{२}$ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन १४१९८५७ रु० है, जब कि व्याज अर्द्धवार्षिक देय होता है।

६. किसी धन का ४% की दर से दो वर्ष का चक्रवृद्धि और सरल व्याज का अन्तर ७५ रु० है तो धन बताओ।

७. किसी नगर की जनसंख्या प्रतिवर्ष ८% बढ़ती है। यदि सन् १९६८ के अन्त में उस नगर की जनसंख्या ११६६४० है तो १९६७ के प्रारम्भ में जनसंख्या क्या थी ?

८. कितने रुपये का ५$\frac{६१}{२४०}$% व्याज की दर से १५ वर्ष में सरल व्याज उतना ही होगा जितना ५०० रु० का ५% की दर से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज है।

९. किसी धन का ५% की दर से ३ वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज ३३१.१२५ रु० है तो सरल व्याज ज्ञात करो।

१०. कितने रुपये का ४% की दर से २ वर्ष का चक्रवृद्धि और सरल व्याज का अन्तर १० रु० है ?

व्याज की दर ज्ञात करना : (१) जब कि मूलधन, चक्रवृद्धि मिश्रधन तथा समय दिया गया हो।

सूत्र :–

$$मि = मू\left(१ + \frac{द}{१००}\right)^{स}$$

में यदि मू, मि तथा स दिये गये हों तो द ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण १. यदि ५०० रु० का २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ५५१ रु० २५ पै० है; तो व्याज की दर ज्ञात करो।

सूत्र है :—

$$मि = मू\left(१ + \frac{द}{१००}\right)^{स}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यहाँ मू = ५०० रु०

मि = ५५१·२५ रु०

स = २ वर्ष

$$\therefore ५५१·२५ = ५०० \left(१ + \frac{द}{१००}\right)^२$$

$$\therefore \left(१ + \frac{द}{१००}\right)^२ = \frac{५५१·२५}{५००} = १·१०२५$$

$$\therefore १ + \frac{द}{१००} = \sqrt{१·१०२} = १·०५ = \frac{द}{१०२} = ·०५$$

$$\therefore द = ·०५ \times १०० = ५$$

∴ अभीष्ट प्रतिशत दर = ५%

(२) जब मूलधन, चक्रवृद्धि ब्याज तथा समय दिये गये हों।

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

अब पहले की तरह प्रश्न किया जा सकता है।

उदाहरण २. यदि ६४००० रु० का ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज २९२१ रु० हो, तो ब्याज की दर ज्ञात करो।

चक्रवृद्धि मिश्रधन = ६४,००० + २९२१ = ६६९२१ रु०

अब सूत्र :—

$$मि = मू \left(१ = \frac{द}{१००}\right)^{स} \text{ में}$$

मि = ६६९२१ रु०

मू = ६४००० रु०

स = ३ वर्ष

$$\therefore ६६९२१ = ६४००० \left(१ + \frac{द}{१००}\right)^३$$

$$\text{या } \left(१ + \frac{द}{१००}\right)^३ = \frac{६६९२१}{६४०००} = \left(\frac{४१}{४०}\right)^३$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

या $१+\frac{द}{१००}=\frac{४१}{४०}$

$\therefore \frac{द}{१००}=\frac{४१}{४०}-१=\frac{१}{४०}$

$\therefore द=\frac{१००}{४०}=२\frac{१}{२}$

$\therefore$ ब्याज की दर $=२\frac{१}{२}\%$ वार्षिक

प्रश्नावली ५ (ग)

१. यदि ४०० रु० का चक्रवृद्धि मिश्रधन ४४१ रु० है तो ब्याज की दर बताओ।

२. यदि चक्रवृद्धि ब्याज से ३ वर्ष में २५० रु०, ३३२ रु० ७५ पै० हो जाता है तो ब्याज की दर बताओ।

३. यदि कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज से २ वर्ष में $१\frac{९}{१६}$ गुना हो जाता है तो ब्याज की दर बताओ।

४. १००० रु० का ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ३३१ रु० है तो ब्याज की दर बताओ।

५. कोई धन २ वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज से चार गुना हो जाता है तो ब्याज की दर बताओ।

६. किसी नगर की जनसंख्या १९४४८१ है तथा चार वर्ष पहले जनसंख्या १६०००० थी तो जनसंख्या बढ़ने की दर बताओ।

७. कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज पर बैंक में जमा किया जाता है। दूसरे साल का ब्याज ११२ रु० ५० पै० है और तीसरे साल का ब्याज ११५·३१२५ रु० है तो ब्याज की दर बताओ।

८. किसी धन का एक वर्ष का ब्याज १० रु० है और २ वर्ष का ब्याज २० रु० ४० पै० है तो बताओ ब्याज सरल है, या चक्रवृद्धि और ब्याज की दर बताओ।

समय ज्ञात करना :—(१) जब कि मूलधन, चक्रवृद्धि मिश्रधन तथा ब्याज की दर दी गई हो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सूत्र :—

$$\text{मि} = \text{मू}\left(१ + \frac{\text{द}}{१००}\right)^{\text{स}}$$

में मि, मू, ज्ञात है तो स ज्ञात किया जा सकता है।

(२) जब चक्रवृद्धि ब्याज, मूलधन तथा ब्याज की दर दी गई है।

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

अब यह प्रथम प्रकार का प्रश्न हो जाता है ?

उदाहरण १. कितने वर्ष में ३३७५ रु० का ६$\frac{२}{३}$% की दर से चक्रवृद्धि मिश्रधन ४०९६ रु० हो जायेगा ?

सूत्र :—

$$\text{मि} = \text{मू}\left(१ + \frac{\text{द}}{१००}\right)^{\text{स}}$$

यहाँ मि = ४०९६ रु०

मू = ३३७५ रु०

$\text{द} = \frac{२०}{३}\%$.

$$\therefore ४०९६ = ३३७५\left(१ + \frac{२०}{३ \times १००}\right)^{\text{स}}$$

$$\text{या } ४०९६ = ३३७५\left(\frac{१६}{१५}\right)^{\text{स}}$$

$$\text{या } \left(\frac{१६}{१५}\right)^{\text{स}} = \frac{४०९६}{३३७५} = \left(\frac{१६}{१५}\right)^{३}$$

∴ स = ३ वर्ष

∴ अभीष्ट समय = ३ वर्ष

द्वितीय विधि :—प्रथम वर्ष के लिये मूलधन = ३३७५ रु०

$$३३७५ \text{ रु० का १ वर्ष का } ६\tfrac{२}{३}\% \text{ से ब्याज} = ३३७५ \times \frac{२०}{३ \times १००}$$

$= २२५$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ द्वितीय वर्ष के लिये मूलधन $= ३३७५ + २२५ = ३६००$ रु०

∴ ३६०० रु० का १ वर्ष का $६\frac{२}{३}\%$ से ब्याज $= ३६०० \times \frac{२०}{३ \times १००}$

$= २४०$ रु०

∴ तृतीय वर्ष के लिये मूलधन $= ३६०० + २४० = ३८४०$ रु०।

३८४० रु० का १ वर्ष का $६\frac{२}{३}\%$ से ब्याज $= ३८४० \times \frac{२०}{३ \times १००} = २५६$ रु०

∴ तृतीय वर्ष के अन्त में मिश्रधन $= ३८४० + २५६ = ४०९६$ रु०।

∴ अभीष्ट समय $= ३$ वर्ष

टिप्पणी :—यदि समय पूर्ण वर्ष न हो तो दूसरी विधि ही लगानी चाहिए।

उदाहरण. यदि ५% की दर से १६०० रु० का चक्रवृद्धि मिश्रधन १८०८ रु० १० पै० है, तो समय ज्ञात करो।

विधि :—

पहले साल के लिये मूलधन $= १६००$ रु०

१६०० रु० का ५% की दर से १ वर्ष का ब्याज $= १६०० \times \frac{५}{१००}$

$= ८०$ रु०

दूसरे साल के लिये मूलधन $= १६०० + ८० = १६८०$ रु०।

१६८० रु० का ५% की दर से १ वर्ष का ब्याज $= १६८० \times \frac{५}{१००}$

$= ८४$ रु०

तीसरे साल के लिये मूलधन $= १६८० + ८४ = १७६४$ रु०

१७६४ रु० का ५% की दर से १ साल का ब्याज $= १७६४ \times \frac{५}{१००}$

$= ८८.२०$ रु०

तीसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन $= १७६४ + ८८.२० = १८५२.२०$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

किन्तु दिया हुआ मिश्रधन = १८०८·१० रु०

∴ समय ३ वर्ष से कम तथा २ वर्ष से अधिक है।

तीसरे वर्ष में मिला ब्याज = (१८०८·१०-१७६४) रु०

= ४४·१० रु०

अब १७६४ रु० का ५% से ८८·२० रु० ब्याज पर समय = १ वर्ष

∴ ,, ,, ,, ४४·१० ,, ,, = $\frac{१}{२}$ वर्ष

अतः कुल अभीष्ट समय = २$\frac{१}{२}$ वर्ष

प्रश्नावली ५ (घ)

१. यदि ३% वार्षिक की दर से ६१५०० रु० का चक्रवृद्धि मिश्रधन ६८२६२ $\frac{७}{१६}$ रु० है, तो समय ज्ञात करो।

२. यदि ८१०० रु० ३३$\frac{१}{३}$% की वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज लगाने पर २५६०० रु० हो जाता है, तो समय ज्ञात करो।

३. यदि २२५० रु० का ६$\frac{२}{३}$% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ३१० रु० हो, तो समय ज्ञात करो।

४. एक आदमी १६०० रु० ५% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार देता है, तो कितने समय में उसको ३४४ रु० ८१ पै० ब्याज मिलेगा ?

५. यदि ब्याज अर्द्धवार्षिक देय हो तो ४०९६ रु० का १२$\frac{१}{२}$% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ८१७ रु० है। समय ज्ञात करो।

६. १००० रु० १०% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दिया जाता है तो कितने समय का ब्याज ३९७ रु० ५० पै० होगा ?

विविध प्रश्न :—

उदाहरण १. किसी धन का चक्रवृद्धि ब्याज उसके सरल ब्याज से १ रु० अधिक है। यदि ब्याज की दर ५% वार्षिक तथा समय २ वर्ष हों तो धन ज्ञात करो।

मान लिया धन १ रु० है।

∴ १०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = ५ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ १ रु० का २ वर्ष का ब्याज $= \frac{५}{१००} \times २ = \frac{१}{१०}$ रु०

$\therefore$ १ का १ वर्ष का मिश्रधन $= १ + \frac{१}{२०} = \frac{२१}{२०}$ रु०

$\therefore$ १ रु० का २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन $= \left(\frac{२१}{२०}\right)^२ = \frac{४४१}{४००}$ रु०

$\therefore$ १ रु० का २ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $= \frac{४४१}{४००} - १ = \frac{४१}{४००}$ रु०

$\therefore$ १ रु० के चक्रवृद्धि ब्याज तथा सरल ब्याज का अन्तर

$$= \frac{४१}{४००} - \frac{१}{१०} = \frac{१}{४००} \text{ रु०}$$

जब अन्तर $\frac{१}{४००}$ है तो धन = १ रु०

जब अन्तर १ रु० है तो धन = ४०० रु०

$\therefore$ अभीष्ट धन = ४०० रु०

उदाहरण २ :—किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन २२०५ रु० तथा ३ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन २३१५ रु० २५ पै० है। ब्याज की दर तथा धन ज्ञात करो।

२ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = २२०५ रु०

३ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = २३१५ रु० २५ पै०

अन्तर = ११० रु० २५ पै०

$\therefore$ २२०५ रु० का १ वर्ष का ब्याज $= \frac{४४१}{४}$ रु०

$\therefore$ १०० रु० ,, ,, ,, $= \frac{४४१ \times १००}{४ \times २२०५} = ५$ रु०

अभीष्ट ब्याज की दर = ५% वार्षिक

सूत्र :— $मि = मू\left(१ + \frac{द}{१००}\right)^{स}$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

से, $२२०५ = मू \left(१ + \frac{५}{१००}\right)^२ = मू \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०}$

$$\therefore मू = \frac{२२०५ \times २० \times २०}{२१ \times २१} = २००० \text{ रु०}$$

$\therefore$ अभीष्ट मूलधन $= २०००$ रु०

उदाहरण ३. एक आदमी २५२२० रु० ५% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर ऋण लेता है और उसको तीन बराबर वार्षिक किस्तों में भुगतान करता है, तो वार्षिक किस्त बताओ।

प्रथम विधि :—मान लिया प्रत्येक वार्षिक किस्त य रु० की है। १ रु० का ५% वार्षिक से १ वर्ष का मिश्रधन=

$$१ + \frac{५}{१००} = १ + \frac{१}{२०} = \frac{२१}{२०}$$

जब मिश्रधन $\frac{२१}{२०}$ रु० है तो मूलधन १ रु० है।

$\therefore$ „ „ य रु० है तो „ $= \left(\frac{२०}{२१}\right)$ य रु० है।

अब १ रु० का २ वर्ष का मिश्रधन $= \left(\frac{२१}{२०}\right)^२$ रु०

जब मिश्रधन $\left(\frac{२१}{२०}\right)^२$ है तो मूलधन $= १$ रु०

$\therefore$ „ य „ $= \left(\frac{२०}{२१}\right)^२$ य रु०

इसी प्रकार १ रु० का ३ वर्ष का मिश्रधन $= \left(\frac{२०}{२१}\right)^3$ रु०

जब मिश्रधन $\left(\frac{२१}{२०}\right)^3$ रु० है तो मूलधन $= १$ रु०

$\therefore$ „ „ य „ „ $= \left(\frac{२०}{२१}\right)^3$ य रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इन तीनो मूलधनों का योग कुल लिये हुये धन के बराबर है

$$\therefore \frac{२०}{२१} य + \left(\frac{२०}{२१}\right)^२ + \left(\frac{२०}{२१}\right)^३ = २५२२० \text{ रु०}$$

$$\text{या } \frac{२०}{२१} य \left\{ १ + \frac{२०}{२१} + \left(\frac{२०}{२१}\right)^२ \right\} = २५२२० \text{ रु०}$$

$$\text{या } \frac{२०}{२१} य \left\{ १ + \frac{२०}{२१} + \frac{४००}{४४१} \right\} = २५२२० \text{ रु०}$$

$$\therefore \frac{२०}{२१} \cdot \frac{१३६१}{४४१} = २५२२० \text{ रु०}$$

$$\therefore य = \frac{२१ \times ४४१}{२० \times १३६१} \times २५२२०$$

$$= ९२६१ \text{ रु०}$$

$\therefore$ अभीष्ट वार्षिक किस्त $= ९२६१$ रु०

द्वितीय विधि :—मान लिया वार्षिक किस्त = य रु०

$\therefore$ १ रु० का १ वर्ष का ५% से मिश्रधन $= १ + \frac{५}{१००} = \frac{२१}{२०}$ रु०

$\therefore$ २५२२० रु० „ „ „ $= २५२२० \times \frac{२१}{२०}$ रु०

इसमें से य रु० की किस्त देने के बाद बाकी धन

$$= \left(२५२२० \times \frac{२१}{२०} - य \right) \text{ रु०}$$

अब इस $\left(२५२२० \times \frac{२१}{२०} - य\right)$ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन

$$= \left\{ २५२२० \times \frac{२१}{२०} - य \right) \frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

$$= \left\{ २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^२ - य \times \frac{२१}{२०} \text{ रु०} \right\}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसमें से य रु० की दूसरी किस्त दे देने पर शेष

$$=\left\{ २५२२० \times \left(\frac{२१}{२८}\right)^{२} - य \times \frac{२१}{२०} - य \right\} \text{ रु०}$$

$$=\left\{ २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^{२} - य \times \frac{४१}{२०} \right\} \text{ रु०}$$

इस $\left\{ २५२२० - \left(\frac{२१}{२०}\right)^{२} - य \times \frac{४१}{२०} \right\}$ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन

$$= \left\{ २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^{२} - य \times \frac{४१}{२०} \right\} \frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

$$=\left\{ २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^{३} - य \times \frac{८६१}{४००} \right\} \text{ रु०}$$

और यह धन अन्तिम किस्त य के बराबर है।

$$\therefore २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^{३} - य \times \frac{८६१}{४००} = य$$

$$\therefore य \times \frac{८६१}{४००} + य = २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^{३}$$

$$\text{या} \quad \frac{१२६१}{४००} य = २५२२० \times \left(\frac{२१}{२०}\right)^{३}$$

$$\therefore य = २५२२० \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{४००}{१२६१}$$

$$= ९२६१ \text{ रु०}$$

अभीष्ट वार्षिक किस्त = ९२६१ रु०

उदाहरण ४. एक व्यापारी कुछ रुपया इस शर्त पर उधार लेता है कि वह इस धन को ५% वार्षिक से चक्रवृद्धि ब्याज देकर २ वर्ष में ८८२ रु० की दो समान वार्षिक किस्तों में लौटा देगा, तो उधार लिया गया धन बताओ।

मान लिया उधार लिया गया धन य रु० है। य रु० का ५% वार्षिक से १ वर्ष का मिश्रधन $=\left(य \; १ + \frac{५}{१००} \right)$ रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$=\frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

८८२ रु० की पहली किस्त देने के बाद बचा धन

$$=\left(\frac{२१}{२०} य - ८८२\right) \text{ रु०}$$

इस $\left(\frac{२१}{२०} य - ८८२\right)$ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन

$$=\left(\frac{२१}{२०} य - ८८२\right)\frac{२१}{२०} \text{ रु०}$$

$$=\left(\frac{२१}{२०}\right)^२ य - ८८२ \times \frac{२१}{२०}$$

और यह दूसरी किस्त ८८२ रु० के बराबर है।

$$\therefore \left(\frac{२१}{२०}\right)^२ य - ८८२ \times \frac{२१}{२०} = ८८२$$

$$\text{या } \left(\frac{२१}{२०}\right)^२ य = ८८२\left(१+\frac{२१}{२०}\right) = \frac{८८२ \times ४१}{२०}$$

$$\therefore य = \frac{२०}{२१} \times \frac{२०}{२१} \times \frac{८८२ \times ४१}{२०}$$

$$= १६४० \text{ रु०}$$

$\therefore$ अभीष्ट धन = १६८० रु०

उदाहरण ५. कुछ धन ५% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर ४ वर्ष के लिए उधार दिया गया है। यदि तीसरे वर्ष का ब्याज दूसरे वर्ष के ब्याज से २६२ रु० ५० पै० अधिक है तो ४ वर्ष का कुछ ब्याज तथा धन बताओ।

तीसरे वर्ष का ब्याज—दूसरे वर्ष का ब्याज

= दूसरे वर्ष के ब्याज पर ५% से १ वर्ष का ब्याज

$\therefore$ दूसरे वर्ष के ब्याज पर ५% से एक वर्ष का ब्याज = $२६२\frac{१}{२}$ रु०

$$= \frac{५२५}{२} \text{ रु०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ दूसरे वर्ष का ब्याज $= \frac{५२५}{२} \times \frac{१००}{५} =$ ५२५० रु०

पहले वर्ष के मिश्रधन पर ५% से १ वर्ष का ब्याज = ५२५० रु०

∴ पहले वर्ष का मिश्रधन $= \frac{५२५० \times १००}{५} =$ १०५००० रु०

१ वर्ष में ५% से १०५ रु० मिश्रधन पर मूलधन = १०० रु०

∴ १०५००० „ „ „ $= \frac{१००}{१०५} \times १०५०००$

= १००००० रु०।

अभीष्ट धन = १००००० रु०

१००००० रु० का ५% से ४ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन

$$= १००००० \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०}$$

$$= \frac{१९४४८१०}{१६} \text{ रु०}$$

∴ ४ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $= \frac{१९४४८१०}{१६} - १०००००$

$$= \frac{३४४८१०}{१६}$$

$$= २१५५० \frac{५}{८} \text{ रु०}$$

∴ अभीष्ट ब्याज $= २१५५० \frac{५}{८}$ रु०

उदाहरण ६. किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज २१० रु० तथा ४ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ४६४ रु० १० पै० है, तो धन तथा ब्याज की दर बताओ ?

मान लिया मूलधन = य रु०

तथा १ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन = र रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ दो वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = य $र^{२}$ − य = य ($र^{२}$ − १)
= २१० ...(१)

∴ तीन वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = य $र^{४}$ − य = य ($र^{४}$ − १)
= ४६४ रु० १० पै०

$$= \frac{४६४१}{१०} \text{ रु०} \qquad \cdots \qquad (२)$$

समीकरण (२) को समीकरण (१) से भाग देने पर

$$\frac{य\,(र^{४}-१)}{य\,(र^{२}-१)} = \frac{४६४१}{१०\times२१०}$$

$$\therefore\ र^{२}+१ = \frac{४६४१}{२१००}$$

$$\therefore\ र^{२} = \frac{४६४१}{२१००} - १ = \frac{२५४१}{२१००} = \frac{१२१}{२००} = \left(\frac{११}{२०}\right)^{२}$$

$$\therefore\ र = \frac{११}{१०}$$

∴ १ रु० का १ वर्ष का मिश्रधन $= \frac{११}{१०}$ रु०

∴ १ रु० का १ वर्ष का ब्याज $= \frac{११}{१०} - १ = \frac{१}{१०}$ रु०

∴ १०० रु० ,, ,, $= \frac{१००}{१०} \times १ = १०$ रु०

∴ ब्याज की दर = १०% वार्षिक

अब १ रु० का २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन $= \left(\frac{११}{१०}\right)^{२}$ रु० $= \frac{१२१}{१००}$

∴ १ रु० ,, ,, ब्याज $= \frac{१२१}{१००} - १ = \frac{२१}{१००}$ रु०

अब $\frac{२१}{१००}$ रु० चक्रवृद्धि ब्याज है तो मूलधन = १ रु०

∴ २१० रु० ,, ,, $= \frac{१००}{२१} \times २१०$
= १००० रु०

∴ मूलधन = १००० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५ (च)

१. वह धन ज्ञात करो जिस पर ५% वार्षिक से २ वर्ष के सरल तथा चक्रवृद्धि ब्याज का १५ रु० है।

२. किसी धन का २ वर्ष का सरल ब्याज ४०० रु० तथा चक्रवृद्धि ब्याज ४०८ रु० है तो ब्याज की दर तथा मूलधन ज्ञात करो।

३. १०० रु० २ का वर्ष का २ सरल तथा चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ११ रु० है तो ब्याज की दर बताओ।

४. २५०० रु० का ४% से किसी समय का सरल तथा चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ४ रु० है तो समय ज्ञात करो।

५. किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ५१२० रु० तथा ३ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ५४६१$\frac{1}{3}$ रु० है तो ब्याज की दर तथा मूलधन ज्ञात करो।

६. किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ४८४० रु० है और ३ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ५८५६$\frac{3}{4}$ रु० है तो ब्याज की दर तथा धन बताओ।

७. कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज से ३ वर्ष में १३३१ रु० और ४ वर्ष में १४६४ रु० १० पै० है, तो धन तथा ब्याज की दर बताओ।

८. कोई धन ४% वार्षिक से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दिया जाता है। यदि तीसरे वर्ष का ब्याज दूसरे वर्ष के ब्याज से ४१६ अधिक है, तो मूलधन ज्ञात करो।

९. किसी धन का ३ वर्ष का सरल ब्याज २४० रु० है, और उसका उसी दर से २ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज १६३ रु० २० पैसा है तो मूलधन तथा ब्याज की दर बताओ।

१०. किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि १७२ तथा सरल ब्याज १०० है तो मूलधन तथा ब्याज की दर बताओ।

११. कुछ धन चक्रवृद्धि ब्याज पर ६$\frac{2}{3}$%वार्षिक दर पर दिया जाता है। उसके २ वर्ष के मिश्रधन तथा ३ वर्ष के मिश्रधन में २५६ रु० का अन्तर है तो धन बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१२. एक आदमी १६४ रु० ५% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर २ वर्ष के लिये लेता है और दो समान किस्तों पर भुगतान करता है तो प्रत्येक वार्षिक किस्त का मान बताओ।

१३. एक व्यापारी १,६५८,७७५ रु० एक बैंक से इस शर्त पर उधार लेता है कि उसे ४% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज से ४ समान वार्षिक किस्तों में अदा कर देगा, तो प्रत्येक वार्षिक किस्त क्या होगी ?

१४. एक आदमी हर साल समान धन एक बैंक में जमा करता है। बैंक जमा रुपये पर ५% चक्रवृद्धि ब्याज देता है। यदि तीन वर्ष के अन्त में उस आदमी के खाते में २६४८१ रु० हो जाता है तो हर साल कितना रुपया जमा किया जाता है ?

१५. एक आदमी ने कुछ रुपया ४% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दिया। उसे २ वर्ष तक हर साल १३५२ रु० मिला तो कितना रुपया उधार दिया गया ?

१६. कुछ रुपया १०% वार्षिक से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया गया और ६६५ रु० की तीन समान वार्षिक किस्तों में चुका दिया गया, तो धन बताओ।

१७. एक गाय जिसका दाम अभी ५०० रु० है खरीदी गई और १०० रु० अभी, २०० रु० एक वर्ष बाद तथा २५० रु० २ वर्ष बाद दिया गया, तो ब्याज दर बताओ।

१८. एक आदमी नगरपालिका का एक मकान इस शर्त पर खरीदता है कि उसका मूल्य एक साल बाद देना प्रारम्भ करेगा। और १३३१ रु० की तीन वार्षिक किस्तों में उसका दाम चुकता करेगा : यदि ब्याज की दर १०% वार्षिक हो तो उस मकान का वर्तमान मूल्य क्या है ?

१९. किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ४१० रु० तथा ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ६३० रु० ५० पै० है तो धन तथा ब्याज की दर बताओ।

२०. यदि २५६० रु० चक्रवृद्धि ब्याज से ८ वर्ष में ४००० रु० हो जाता है तो १२०० रु० का (क) ४ साल तथा (ख) १२ साल का मिश्रधन बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२१. एक आदमी के पास ८२०० रु० है और उसके २ लड़के हैं जिनकी अवस्थायें इस समय १५ साल और १६ साल है। बताओ वह हर लड़के के नाम किसी बैंक में कितना-कितना रुपया जमा कर दे कि जब उनकी अवस्थायें २० वर्ष हो तो उनको समान धन मिले। बैंक ५% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देता है।

२२. दो नगरों की जनसंख्या इस समय समान है। एक नगर की जनसंख्या हर वर्ष १००० पर २४ की दर से बढ़ती है तथा दूसरे की जनसंख्या इसी दर से घटती है, तो ३ वर्ष के अन्त में उनकी जनसंख्या में अनुपात ज्ञात करो।

२३. एक बैंक कुछ रु० ३% वार्षिक से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लेता है और उसे तुरन्त ५% वार्षिक से चक्रवृद्धि ब्याज पर, ब्याज अर्द्धवार्षिक देय करके, उधार दे देता है। इस प्रकार वर्ष के अन्त में उसे ६६० रु० का लाभ हो जाता है तो कितना रु० उधार लिया गया था ?

२४. मोहन तथा मोहन के धनों में ४४१ : ४०० का अनुपात है। मोहन अपने रुपये को ५% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर ३ वर्ष के लिये उधार देता है, तो बताओ सोहन अपने रुपये को कितने प्रतिशत वार्षिक सरल ब्याज पर उधार दे कि उसको भी ३ वर्ष के अन्त में मोहन के बराबर रुपये मिलें ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

6 वृत्त का क्षेत्रफल
(AREA OF A CIRCLE)

वृत्त : यदि समतल मैदान में एक खूंटी गाड़ कर उसमें रस्सी का एक सिरा बांध दिया जाय और दूसरे सिरे पर रस्सी को पकड़ कर उसे ताने हुये खूंटी के चारों तरफ एक चक्कर लगावें तो इस प्रकार चलने से जो रास्ता बनेगा उसका प्रत्येक बिन्दु खूंटी से बराबर दूरी पर होगा। ऐसे रास्ते से बने हुये आकृति को वृत्त कहते हैं।

परिभाषा : यदि कोई बिन्दु किसी समतल पर इस प्रकार चलता है कि समतल के किसी स्थिर बिन्दु से उसकी दूरी सदैव समान रहे तो उस बिन्दु के पथ से बनी आकृति को वृत्त (Circle) कहते हैं।

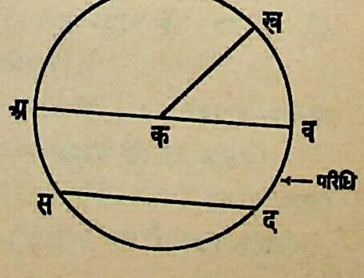
स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र (Centre) तथा स्थिर बिन्दु से गति करने वाले बिन्दु की दूरी को वृत्त की तृज्या (Radius) कहते है। गति करने वाले बिन्दु के पथ को वृत्त की परिधि (Circumference) कहते हैं। वृत्त के परिधि पर किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त रेखा को जीवा (Chord) कहते हैं। उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है व्यास (Diameter) कहते हैं।

क —→ केन्द्र

क ख —→ त्रिज्या

स द —→ जीवा

अ ब —→ व्यास



Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वृत्त के विशेष गुण : उपरोक्त परिभाषाओं से हम वृत्त में निम्नलिखित गुण पाते हैं :—

(i) वृत्त की सभी त्रिज्याओं की लम्बाई समान होती है। जैसे—

क ब = क ख = अ क।

(ii) व्यास की लम्बाई त्रिज्या की लम्बाई की दुगुनी होती है।

क्योंकि अ ब = अ क + क ब

= २ अ क ($\because$ अ क = क ब)

(iii) व्यास वृत्त को दो समान भागों में बाँटता है। जिसमें से प्रत्येक को अर्द्ध वृत्त (Semicircle) कहते हैं।

वृत्त के व्यास और परिधि में सम्बन्ध : यदि भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं से वृत्त खींचे जायें और उनकी परिधि को तागे से नाप कर परिधि की लम्बाई में व्यास की लम्बाई से भाग दें तो हर बार भागफल समान आता है। अर्थात् परिधि और व्यास की लम्बाइयों का अनुपात किसी भी वृत्त के लिये स्थिर रहता है। यह स्थिर अनुपात किसी भी वृत्त के लिये स्थिर रहता है। इस स्थिर अनुपात को यूनानी लिपि के अक्षर π (पाई) द्वारा व्यक्त करते हैं। इसका मान लगभग $\frac{२२}{७}$ या दशमलव के चार अंक तक ३·१४१५ होता है।

$$\text{अतः } \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi = \frac{२२}{७} \text{ या } ३·१४१५$$

इसलिये परिधि = π × व्यास

यदि त्रिज्या को र से व्यक्त करें तो व्यास = २ र

$\therefore$ परिधि = π × २ र

= २ π र

$$\text{अतः व्यास} = \frac{\text{परिधि}}{\pi}$$

उदाहरण १. एक इंजन के पहिये का व्यास १ मीटर है, तो उसकी परिधि बताओ और २१०० चक्कर करने में कितनी दूर जायेगा ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

परिधि $=\pi \times$ व्यास

$$=\frac{२२}{७}\times १=\frac{२२}{७} \text{ मीटर}$$

∵ एक चक्कर करने में तय की गई दूरी $=\frac{२२}{७}$ मीटर

∴ २१०० ,, ,, ,, $=\frac{२२}{७}\times २१००$

$=६६००$ मीटर

$=६·६$ कि० मीटर

उदाहरण २. एक वृत्त की परिधि १ मीटर है तो उसकी त्रिज्या ज्ञात करो जब कि $\pi=३·१४$

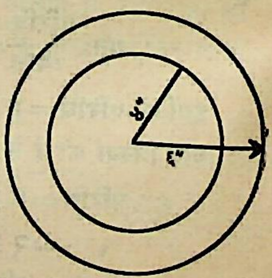
∴ परिधि $=२\pi$ र

$$∴ \text{र} =\frac{\text{परिधि}}{२\pi}=\frac{१ \text{ मीटर}}{२\times ३·१४}=\frac{१००}{६·२८} \text{ से० मी०}$$

$=१५९२$ से० मी०

उदाहरण ३. किसी घड़ी के सूइयों की लम्बाई ६" और ४" है तो सोमवार को १० बजे प्रातः से अगले बुधवार को १० बजे रात तक दोनों सूइयों के नोकों द्वारा तय की गई दूरियों का अन्तर ज्ञात करो। ($\pi=३·१४$)

सोमवार को दस बजे दिन से लेकर बुधवार को १० बजे रात तक का कुल समय =६० घन्टे। उपरोक्त समय में घन्टे वाली सूई ५ चक्कर और मिनट वाली सूई ६० चक्कर करेगी।



∴ घन्टे वाली सूई के नोक द्वारा तय की गई दूरी = परिधि × १००

$=२\pi$ र $\times ५$

$=२\pi\times ४\times ५$

$=२\pi\times २०$ इंच

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ मिनट वाली सूई के नोक द्वारा तय की गई दूरी $=२\pi\times६\times६०$

अभीष्ट अन्तर $=२\pi(३६०''-२०'')$ इंच $=२\pi\times३६०$ इंच

$=२\times३\cdot१४\times३४०$ इंच $=२१३५\cdot२$ इंच

उदाहरण ४. किसी गाड़ी के एक पहिये का व्यास दूसरे से २ इंच अधिक है। यदि एक मील चलने में पहला पहिया दूसरे से ४८ चक्कर कम करता है तो प्रत्येक पहिये का व्यास ज्ञात करो।

मान लिया बड़े पहिये का व्यास = य इंच

∴ छोटे पहिये का व्यास $=(य-२)$ इंच

∴ बड़े पहिये की परिधि $=\pi\times$ व्यास

$=\pi$ य इंच

∴ छोटे पहिये की परिधि $=\pi(य-२)$ इंच

एक मील चलने में बड़ी पहिया की चक्कर संख्या $=\dfrac{१७६०\times३\times१२}{\pi य}$

और छोटी पहिया की चक्कर संख्या $=\dfrac{१७६०\times३\times१२}{\pi(य-२)}$ ∴

$$\therefore \frac{१७६०\times३\times१२}{\pi(य-२)}-\frac{१७६०\times३\times१२}{\pi य}=४८$$

$$\therefore \frac{७\times१७६०\times३\times१२}{२२}\left(\frac{१}{य-२}-\frac{१}{य}\right)=४८$$

$$\therefore \frac{१}{य-२}-\frac{१}{य}=\frac{४८\times२२}{७\times१७६०\times३\times१२}$$

या $\dfrac{२}{य(य-२)}=\dfrac{१}{४२०}$

या $८८०=य^२-२य$

या $य^२-२य=८८०=०$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

या (य—३०) (य+२८)=०

∴ य = ३० और य=—२८ अमान्य है :

∴ बड़े पहिये का व्यास ३० इञ्च और छोटे का २८ इञ्च है।

उदाहरण ५. दो दांतेदार पहिये एक दूसरे से सम्बन्धित हैं। जिनमें से एक में ३२ दांत और दूसरे में ३६ दांत हैं। बड़ी पहिया प्रति सेकण्ड ६४ चक्कर लगाता है तो बताओ कि ६० घन्टे में वही दो दांत कितने बार सम्पर्क में आवेंगे?

३२ तथा ३६ का लघुतम समापवर्त्य=२८८

∴ प्रत्येक पहिये के २८८ दांते जब एक स्थान से गुजर जायेंगे तब फिर वही दो दांते सम्पर्क में आ जायेंगे।

बड़े पहिये में ३६ दांते हैं।

∴ २८८ दांतों के गुजरने में चक्करों की संख्या $=\frac{२८८}{३६}=८$

∵ बड़ा पहिया १ सेकण्ड में ६४ चक्कर करता है

∴ ,, ६० ,, ६० × ६४ ,,

∴ ६० घंटे में एक ही दांतों के मिलने की संख्या $=\frac{६० \times ३६०० \times ६४}{८}$

$=१७२८०००$

प्रश्नावली ६ (क)

१. यदि किसी पहिये का व्यास १५ सेमी० है तो उसकी परिधि बताओ?

२. यदि किसी वृत्त की परिधि ४४० सेमी० है तो उसकी त्रिज्या ज्ञात करो।

३. एक गोलाकार घास के मैदान का व्यास २८ फीट है तो १ रु० २५ पै० प्रति गज की दर से उसके चारों ओर तार का घेरा लगाने का खर्च बताओ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

४. एक वर्ग की परिमित ४२ इंच व्याज वाले वृत्त के परिधि के बराबर है तो वर्ग की भुजा ज्ञात करो।

५. एक छल्ले की भीतरी तथा बाहरी परिधियां ४ इंच तथा ५ इंच है, तो छल्ले की मोटाई ज्ञात करो।

६. किसी रेल के इंजन के पहिये का व्यास ६ फीट ३ इञ्च है। यदि वह १ मिनट में ११० चक्कर काटता है तो उसकी चाल ज्ञात करो।

७. एक तीन मील लम्बी दौड़ ८४ गज अर्ध व्यास के वृत्ताकार पथ पर कराई जाती है तो जीतने वाले को कितने चक्कर करना पड़ेगा।

८. एक घड़ी की सूइयों की लम्बाइयाँ ८ और १० सेमी० है तो ४ घंटे में उनके नीकों द्वारा तय की गई दूरियों का अन्तर निकालो।

९. एक गाड़ी के अगले और पिछले पहियों के व्यास क्रमशः $१\frac{३}{४}$ मीटर तथा $२\frac{५}{६}$ मीटर है तो ११०० मीटर जाने में अगला पहिया पिछले से कितने अधिक चक्कर लगायेगा।

१०. एक बेलन का व्यास ७ सेमी० है तथा उसकी लम्बाई १४ सेमी० है। उसपर ·०७ सेमी० मोटा तार समान रूप से लपेटा जाता है तो कितने लम्बे तार की आवश्यकता पड़ेगी।

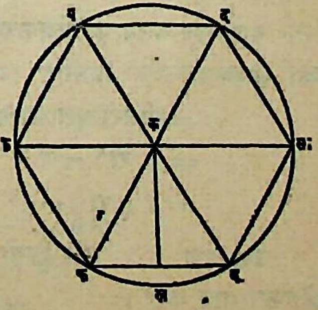
संकेत :—लपेटे गये तारों की चक्कर संख्या $=\frac{१४}{·०७}=२००$

एक चक्कर में लपेटे गये पार की लम्बाई $= \pi \times ७$ सेमी०

मान लो वृत्त का केन्द्र क और इसकी त्रिज्या र है।

वृत्त का क्षेत्रफल :—

वृत्त के अन्तर्गत न भुजाओं का एक समबहुभुज (Regular polygon) अ,ब,स ....अन्तरित (Incribe) किया गया है। वृत्त के केन्द्र क को अ, ब, स...... से मिलाओ। इस प्रकार स म बहुभुज न समान त्रिभुज में बंट जायेगा।



मान लिया : केन्द्र क से भुजा अ ब परख लम्ब है जिसकी लम्बाई ल है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ △ क अ ब का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}$ अ ब × क ख

अतः समबहुभुज का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}$ अ ब × क ख × न

$= \frac{१}{२}$ (अ ब × न) क ख

$= \frac{१}{२}$ बहुभुज की परिमिति × क ख

यदि सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या अपरिमित रूप से (indefinitely) बढ़ा दी जाय तो उसके भुजाओं की लम्बाई बहुत ही छोटी हो जायेगी, और अन्ततोगत्वा बहुभुज वृत्त में विलीन हो जायेगा। इस प्रकार बहुभुज की परिमित वृत्त के परिधि के बराबर और बहुभुज का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल में बदल जायेगा। इस दशा में लम्ब क ख वृत्त के त्रिज्या के बराबर हो जायेगा।

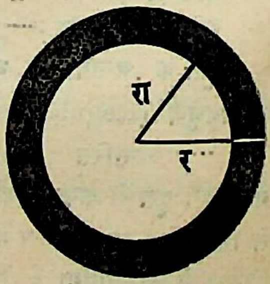
अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}$ वृत्त की परिधि × त्रिज्या

$= \frac{१}{२} २\pi$ र × र

$= \pi$ र^{२} (π र)^{२}

[नियम—वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ (त्रिज्या)^{२}]

वृत्ताकार वलय (Circular ring) दो सम केन्द्रक वृत्तों (Concentric circle) से घिरे हुये क्षेत्र को वृत्ताकार वलय कहते हैं। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल मान लो चित्र में भीतरी वृत्त की त्रिज्या र और बाहरी वृत्त की त्रिज्या रा है

वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल = बहरी वृत्त का क्षेत्रफल

= भीतरी वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi$ रा$^{२} - \pi$ र^{२}

$= \pi$ (रा^{२} — र^{२})

उदाहरण १. यदि किसी वृत्त की त्रिज्या ३·५ से० मी० है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

क्षेत्रफल $= \pi$ र^2

$= \frac{२२}{७} \times ३.५ \times ३.५$

$=$ ३८.५ वर्ग सेन्टीमीटर

उदाहरण २. एक वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल १५४०० वर्ग गज है तो ५ मील की दौड़ कराने के लिये कम से कम कितना चक्कर करना पड़ेगा।

मान लिया मैदान की त्रिज्या $=$ र गज

क्षेत्रफल $= \pi$ र^2

या १५४०० $= \frac{२२}{७} \times$ र^2

$\therefore$ र$^2 = \frac{१५४०० \times ७}{२२}$

$=$ ७०० $\times$ ७ $=$ ४९००

$\therefore$ र $=$ ७० गज

मैदान की परिधि $=$ २ π र

$=$ २ $\times \frac{२२}{७} \times$ ७०

$=$ ४४० गज

$= \frac{१}{४}$ मील

$\frac{१}{४}$ मील के लिये एक चक्कर करना पड़ेगा।

$\therefore$ ५ मील के लिये चक्कर संख्या $= \frac{५}{\frac{१}{४}} =$ २०

उदाहरण ३. एक गोलाकार कमरे का व्यास १४ मीटर है। उसके किनारे पर ७० से० मी० चौड़ा काले रंग का हासिया बनाया जाता है तो ५० पैसे प्रति वर्ग मीटर के हिसाब से रंग कराने का खर्च बताओ।

कमरे की त्रिज्या $= \frac{१४}{२} =$ ७ मीटर

बिना रंगे हुये वृत्त की त्रिज्या $=$ ७ मीटर — ७० सेमी०

$=$ (७ — .७) मीटर

$=$ ६.३ मीटर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

रंगे हुये भाग का क्षेत्रफल $=\pi$ (रा² − र²)

$= \frac{२२}{७}$ (७² − ६·३²)

$= \frac{२२}{७} \times$ (७ + ६·३) (७ − ६·३)

$= \frac{२२}{७} \times$ १३·३ × ·७

= २९·२६ वर्ग मीटर

∴ रंग कराने का खर्च = २९·२६ × ५० पै०

= १४·६३ रु०

उदाहरण ४. एक वृत्ताकार दफ्ती के टुकड़े का व्यास ३० से० मी० है। उसे ठीक बीच से वृत्ताकर काट दिया जाता है। यदि कटे हुये भाग का क्षेत्रफल पूरे का तिहाई है तो इसकी त्रिज्या ज्ञात करो।

दफ्ती की त्रिज्या = १५ से० मी०

∴ दफ्ती का क्षेत्रफल $=\pi \times$ १५ × १५ वर्ग से० मी०

मान लिया कटे हुये भाग की त्रिज्या = र से० मी०

∴ कटे हुये भाग का क्षेत्रफल $=\pi$ र²

∴ π र² $= \frac{१}{३} \pi \times$ १५ × १५

या र² = ७५

या र = ५$\sqrt{३}$ सेमी०

उदाहरण ५. किसी वृत्त का क्षेत्रफल ३०८ वर्ग से० मी० है तो अन्तरित (Inscribed) वर्ग की भुजा की लम्बाई ज्ञात करो।

मान लो वृत्त की त्रिज्या = र

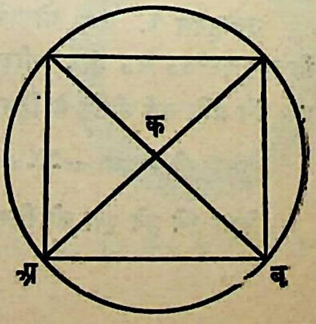
∴ वृत्त का क्षेत्रफल $=\pi$ र²

या ३०८ $= \frac{२२}{७}$ र²

या र² $= \frac{३०८ \times ७}{२२}$

= ९८ = ४९ × २

अब क अ ब एक समद्विबाहु समकोण



Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

△ है, जिसमें ∠ अ क ब = ९०°

और भुजा अ क = क ब = त्रिज्या = र

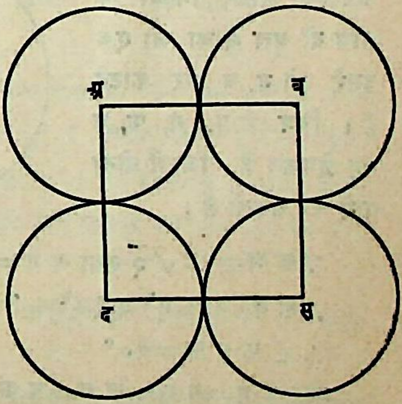
∴ अ ब² = अ क² + क ब²

= २ अ क² = २ र²

= २ × ४९ × २

अ ब = १४

उदाहरण ६. किसी वर्ग की भुजा की लम्बाई १७·५ सेमी० है। उसके चारों कोनों पर समान वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि उनमें से कोई भी अन्य दो को स्पर्श करती है तो वृत्तों के परिधियों के स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



वर्ग के भीतर प्रत्येक वृत्त के क्षेत्रफल का चौथाई भाग है। चूंकि सभी वृत्त समान क्षेत्रफल का है इसलिये वर्ग के भीतर सभी वृत्तों के क्षेत्रफल का योग एक वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर है। इसलिये वर्ग के क्षेत्रफल में से एक वृत्त का क्षेत्रफल घटाने से अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात होगा।

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)² = १७·५ × १७·५ वर्ग सेमी०

किसी भी वृत्त की त्रृज्या = $\frac{१७·५}{२}$ सेमी०

= ८·७५ सेमी०

इसका क्षेत्रफल = π × ८·७५ × ८·७५

= $\frac{२२}{७}$ × ८·७५ × ८·७५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल $= १७·५ \times १७·५ - \frac{२२}{७} \times ८·७५ \times ८·७५$

$= २ \times ८·७५ \times · \times ८·७५ - \frac{२२}{७} \times ८·७५ \times ८·.५$

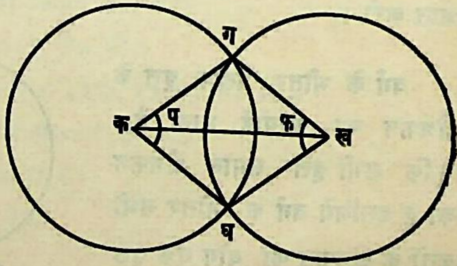
$= ८·७५ \times ८·७५ \left(४ - \frac{२२}{७}\right)$

$= ८·७५ \times ८·:५ \times \frac{६}{७}$

$= ७५·६२५$ वर्ग से० मी०

उदाहरण ७. एक घास के मैदान में दो खूंटे $१४\sqrt{२}$ मीटर की दूरी पर गड़े हैं। इनसे दो गायें प्रत्येक १४ मीटर लम्बी रस्सी से बंधी है तो उस भाग का क्षेत्रफल बताओ जिसमें दोनों चर सकती हैं।

मान लो क और ख दो खूंटे हैं। इनको केन्द्र मानकर १४ मीटर त्रिज्या के साथ दो वृत्त खींचा जो एक दूसरे को ग, घ पर काटते हैं। चित्र से प, ग, फ, घ वह क्षेत्रफल है, जिसमें दोनों गायें चर सकती हैं।



∵ क ख $= १४\sqrt{२}$ तथा क ग = ग ख = १४

∴ क ग^२ + ख ग^२ = $१४^२ + १४^२ = २ \times १४^२$ = क ख^२

∴ ∠ क ग ख = ९०°

और क ग = ग ख = ख घ = घ क

∴ क ग ख घ एक वर्ग है जिसकी भुजा १४ मीटर है।

∵ ∠ग क घ = ∠ग ख घ = ९०°

∴ क्षेत्रफल क घ फ ग = क्षेत्रफल ख घ प ग = वृत्त के क्षेत्रफल का चौथाई

$= \frac{१}{४}\pi \times १४^२$

उभयनिष्ट क्षेत्रफल प ग फ घ = क्षेत्रफल क घ प ग + क्षे० फ० ख घ प ग − वर्ग क ग ख घ का क्षेत्रफल

$= २ \times \frac{१}{४}\pi \times १४^२ - १४^२$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$=१४^२\left(\frac{११}{७}-१\right)=\frac{१४\times१४\times४}{७}$$

$$=११२ \text{ मीटर}$$

प्रश्नावली ६ (ख)

१. उन वृत्तों के क्षेत्रफल बताओ जिनकी त्रिज्यायें निम्नलिखित हैं
(क) १४ से० मी०, (ख) ३·५ मीटर, (ग) $\frac{७}{३}$ मीटर ।

२. उन वृत्तों की त्रिज्यायें बताओ जिनके क्षेत्रफल निम्नलिखित है ।
(क) ४६२ वर्ग सेमी०, (ख) १५४ वर्ग मीटर, (ग) ३८५० वर्ग मीटर ।

३. एक वृत्त की परिधि १३२ सेमी० है वो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

४. उस वृत्त की त्रिज्या बताओ जिसका क्षेत्रफल उन तीन वृत्तों के क्षेत्रफलों के बरावर है जिनकी त्रिज्यायें ८ सेमी०, ९ सेमी० और १२ सेमी० है।

५. एक वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल ६१६ वर्ग मीटर है। इसके चारों ओर तार का घेरा लगाया जाता है। यदि तार लगाने का व्यय ७५ पै० प्रति मीटर है तो खर्च बताओ ।

६. एक वृत्त की परिधि १ वर्ग के परिमित के बराबर है तो उनके क्षेत्रफलों में अनुपात बताओ ।$=\pi\frac{२२}{७}$

७. एक वृत्त का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है तो उनके परिमितियों की तुलना करो ।

८. उस वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल बताओ जिसकी बाहरी तथा भीतरी त्रिज्यायें ११ तथा ४ सेमी० है ।

९. एक वृत्ताकार मैदान का व्यास ५४ मीटर है। उसके बाहर चारों तरफ एक रास्ता बना हुआ है, जिसका क्षेत्रफल ३५२ वर्ग मीटर है तो रास्ते की चौड़ाई बताओ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. एक वृत्ताकार वलय के बाहरी तथा भीतरी त्रिज्याओं का योग ७ से० मी० है। यदि वलय का क्षेत्रफल २२ वर्ग से० मी० है तो दोनों त्रिज्याओं को बताओ।

११. एक कुएं के चारों ओर ३ मीटर चौड़ी वृत्ताकार जगत बंधी है। ऊपर से उसे रंगीन पलास्तर कराने में २ रु० प्रति वर्ग मीटर की दर से १३२ रु० व्यय होता है तो कूएँ का व्यास बताओ।

१२. एक तार को मोड़कर ७७ से० मी० त्रिज्या का वृत्ताकार छल्ला बनाया जा सकता है। यदि उसी तार का वर्ग बनाया जाय तो वर्ग की भुजा बताओ।

१३. एक आयताकार घास के मैदान की लम्बाई ३०८ मीटर और चौड़ाई ८१ मीटर है। यदि एक बकरी आयत की लम्बाई के मध्य बिन्दु पर एक रस्सी से बंधी हुई है तो रस्सी की लम्बाई बताओ ताकि वह घास के मैदान का आधा भाग चर सके।

१४. दो आदमी मिलकर १५ मीटर त्रिज्या का वृत्ताकार खेत खरीदते हैं। यदि उनके हिस्सों का अनुपात ७:४ है तो किस प्रकार उसी केन्द्र वाले वृत्ताकार बाड़े से उनके खेत अलग-अलग किया जा सकता है। जबकि छोटा भाग बीच में हो ?

१५. मोहन और सोहन मिलकर एक शान रखने वाला पत्थर (Grind stone) जिसका व्यास एक मीटर है २५ रु० में खरीदते है। जिसमें मोहन १६ रु० और सोहन ९ रु० देता है। शान की धुरी का व्यास १० से० मी० है तो मोहन को देने के पहले सोहन कितने से० मी० पत्थर घिस सकता है ?

१६. एक वृत्त की त्रिज्या ४$\sqrt{२}$ सेमी० है। इसके भीतर एक वर्ग और वर्ग के भीतर एक वृत्त अन्तरित (Inscribe) किये जाते हैं तो अन्तरित वर्ग और वृत्त के क्षेत्रफलों का अन्तर बताओ।

१७. एक वर्ग की भुजा ८१ सेमी० है। यदि उसके परिगत एक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वृत्त खींचा जाता है तो वर्ग और वृत्त के बीच के भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

१८. एक घास के मैदान में २९$\sqrt{2}$ मीटर की दूरी पर दो खूंटे गड़े हैं। जिनमें २१ मीटर लम्बी २ रस्सियों से दो गायें बंधी हैं तो वह क्षेत्रफल बताओ जिसे दोनों चर सकें।

१९. किसी वर्ग के शीर्षों को केन्द्र मान कर वर्ग की भुजा के आधे के बराबर त्रिज्या लेकर चार वृत्ताकार टुकड़े काट दिये जाते हैं तो सिद्ध करो कि वर्ग का $\frac{3}{14}$ भाग शेष रह जायेगा।

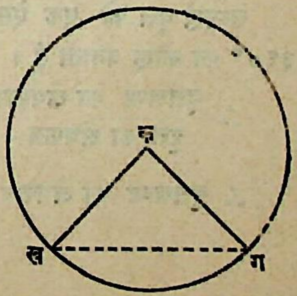
२०. तीन समकेन्द्र वृत्तों में से सबसे बड़े की त्रिज्या १० से० मी० तथा सबसे छोटे की त्रिज्या ८ से० मी० है। यदि मध्य का वृत्त अन्य दो वृत्तों द्वारा बने हुए वलय(Ring) को दो बराबर भागों में बांटता है तो उसकी त्रिज्या ज्ञात करो।

२१. यदि दो समकेन्द्रक वृत्तों द्वारा वलय का क्षेत्रफल उनमें से लघु वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर है तो वृत्तों की त्रिज्याओं की तुलना करो।

वृत्तखण्ड तथा अवधा

(Sector and Segment of a Circle)

परिभाषा : वृत्त की दो त्रिज्याओं से घिरे हुये भाग को वृत्तखंड (Sector) कहते हैं।



जैसे :—चित्र में क ख ग

जीवा ख ग तथा चाप से घिरी आकृति को अवधा (Segment) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वृत्तखण्ड का चाप (Arc) :—

मान लिया वृत्तखण्ड का ∠ अ क ब = अ° और वृत्त की त्रिज्या = र

वृत्त की परिधि = २ π र

वृत्त में चाप की लम्बाई उसके द्वारा केन्द्र पर बने कोण के समानुपाती होता है।

परिधि द्वारा केन्द्र पर बना कोण ३६०° होता है।

$$\therefore \frac{\text{चाप}}{\text{परिधि}} = \frac{\text{अ}^\circ}{३६०^\circ}$$

$$\therefore \text{चाप} = \frac{\text{परिधि} \times \text{अ}^\circ}{३६०^\circ} = \frac{२\,\pi\,\text{र} \times \text{अ}^\circ}{३६०}$$

उदाहरण :—किसी वृत्त की त्रिज्या १४ से० मी० है तो उस चाप की लम्बाई बताओ जो वृत्त के केन्द्र पर ४५° का कोण बनाता है।

$$\text{चाप} = \frac{\pi\,\text{र} \times \text{अ}}{३६०} = \frac{२ \times २२ \times १४ \times ४५}{७ \times ३६०}$$

$$= १ \text{ सेमी०}$$

वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल :—

मान लिया वृत्त की त्रिज्या = र

और वृत्तखण्ड का कोण = अ°

किसी वृत्त में वृत्तखण्डों का क्षेत्रफल उनके कोणों के समानुपाती होता है।

वृत्त का क्षेत्रफल = २ π र

सम्पूर्ण वृत्त को एक ऐसा वृत्तखण्ड माना जा सकता है जो केन्द्र पर ३६०° का कोण बनाता है।

$$\therefore \frac{\text{वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{अ}}{३६०}$$

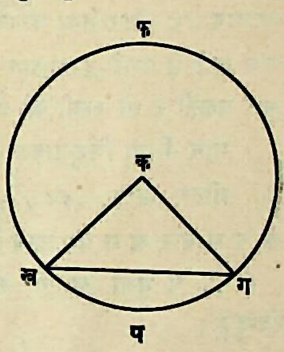
$$\therefore \text{वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{अ}}{३६०} \times \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{\text{अ}}{३६०} \times \pi\,\text{र}^२$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अवधा (Segment) : जीवा ख ग से कटे हुये वृत्त के भाग को अवधा (Segment) कहते हैं। चित्र में ख प ग तथा ख फ ग दो अवधायें हैं।



अवधा ख प ग का क्षेत्रफल = वृत्तखण्ड क ख प ग — △ क ख ग

अवधा ख फ ग का क्षेत्रफल = वृत्तखण्ड क ख फ़ ग + △ क ख ग

उदाहरण १. किसी वृत्त की त्रिज्या ८४ सेमी० है, तो उस वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसका कोण ३०° है।

$$\text{वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{अ}}{३६०} \times \pi \text{र}^2$$

$$= \frac{३०}{३६०} \times \frac{२२}{७} \times ८४ \times ८४$$

$$= १८४८ \text{ वर्ग सेमी०}$$

उदाहरण २. एक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ४४ वर्ग सेमी० है, और उसका कोण ४०° है तो त्रिज्या ज्ञात करो।

मान लिया वृत्त की त्रिज्या = र

$$\text{वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{अ}}{३६०} \pi \text{र}^2$$

$$\therefore ४४ = \frac{४०}{३६०} \times \frac{२२}{७} \text{र}^2$$

$$\therefore \text{र}^2 = \frac{४४ \times ३६० \times ७}{४० \times २२}$$

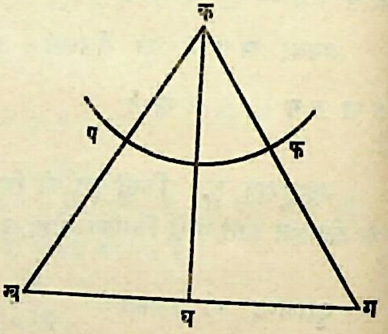
$$= ११\text{·}२२५ \text{ सेमी०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण ३. एक खेत समद्विबाहु त्रिभुज की आकृति का है। जिसका आधार ४४ मीटर तथा बराबर भुजायें ४४ $\sqrt{३}$ मीटर की है। उसके शीर्ष पर एक खूंटे से रस्सी द्वारा एक गाय बंधी हुयी है। यदि वह खेत का आधा क्षेत्रफल चर सकती है तो रस्सी की लम्बाई ज्ञात करो।

मान लिया त्रिभुजाकार खेत क ख ग है। जिसमें क ख = क ग = २२ $\sqrt{२}$ मीटर ख ग = ४४ $\sqrt{३}$ मीटर



क घ आधार ख ग पर लम्ब है।

∴ घ भुजा ख ग का मध्य बिन्दु है।

$$\therefore \text{ज्या ख क घ} = \frac{\text{ख घ}}{\text{क ख}}$$

$$= \frac{२२\sqrt{३}}{४४} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$\angle$ ख क घ = ६०°

$\angle$ ख क ग = १२०°

मान लिया रस्सी की लम्बाई = य मीटर

$$\therefore \text{वृत्तखण्ड क प फ का क्षेत्रफल} = \frac{१२०}{१६०} \times \pi \times \text{य}^२$$

$$= \frac{\pi}{३}\text{य}^२ \text{ वर्ग मीटर}$$

अब लम्ब क ख $= \sqrt{\text{क ख}^२ - \text{ख घ}^२}$

$$= \sqrt{४४^२ - २२^२ + ३}$$

$$= २२\sqrt{४ - ३}$$

$$= २२ \text{ मीटर}$$

$$\therefore \triangle \text{ क ख ग का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२} \times \text{ख ग} \times \text{क घ}$$

$$= \frac{१}{२} \times ४४\sqrt{३} \times २२$$

$$= २२ \times २२\sqrt{३} \text{ वर्ग मीटर}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore \frac{\pi}{\text{३}} \text{य}^{\text{२}} = \frac{\text{१}}{\text{२}} \times \text{२२} \times \text{२२} \sqrt{\text{३}}$ वर्ग मीटर

$\therefore \text{य}^{\text{२}} = \frac{\text{१}}{\text{२}} \times \text{२२} \times \text{२२} \times \sqrt{\text{३}} \times \frac{\text{३}}{\pi}$

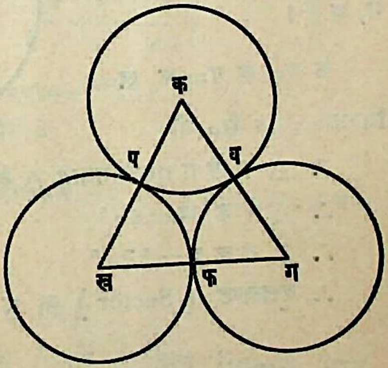
$= \frac{\text{२२} \times \text{२२} \times \sqrt{\text{३}} \times \text{३} \times \text{७}}{\text{२२} \times \text{२२}}$

$\therefore$ = ४००·०९२

$\therefore$ य = २०·०२ मीटर

$\therefore$ रस्सी की लम्बाई = २०·०२ मीटर

उदाहरण ४. तीन समान वृत्त परस्पर स्पर्श करते हुये रखे गये हैं। यदि प्रत्येक की त्रिज्या एक सेमी० है तो उनके बीच की खाली जगह का क्षेत्रफल बताओ।



मान लिया वृत्त के केन्द्र क ख ग हैं।

$\therefore$ क ख = ख ग = ग क = २ सेमी०

$\therefore$ क ख ग समबाहु है।

$\therefore$ इसका प्रत्येक $\angle$ ६०° है।

वृत्त खण्ड प क ब $= \frac{\text{६०}}{\text{३६०}} \times \pi \, \text{१}^{\text{२}} = \frac{\text{२}\pi}{\text{६}}$ व सेमी०

$\triangle$ क ख ग में क से ख ग पर लम्ब

क फ$^{\text{२}}$ $= \sqrt{\text{क ख}^{\text{२}} - \text{ख फ}^{\text{२}}} = \sqrt{\text{२}^{\text{२}} - \text{१}^{\text{२}}} = \sqrt{\text{३}}$

$\therefore \triangle$ क ख ग $= \frac{\text{१}}{\text{२}}$ ख ग × क फ $= \frac{\text{१}}{\text{२}} \times \text{२} \times \sqrt{\text{३}} = \sqrt{\text{३}}$ व सेमी०

अतः वृत्तों के बीच की खाली जगह = $\triangle$ क ख ग − ३ × वृत्तखण्ड प फ व

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

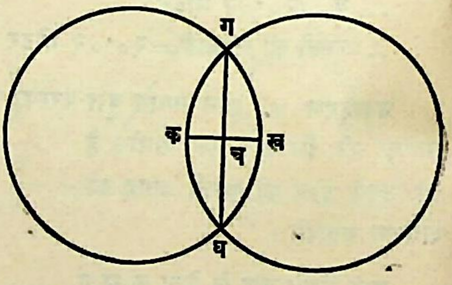
$$=\sqrt{३}-३\times\frac{\pi}{६}=\sqrt{३}-\frac{१}{२}\times\frac{२२}{७}$$

$$=१\cdot७३२-१\cdot५७१$$

$$=०\cdot१६१ \text{ व० सेमी०}$$

उदाहरण ५. दो बराबर वृत्त जिनके अर्धव्यास ३·५ सेमी० हैं। एक दूसरे के केन्द्र से होकर जाते हैं तो उनके उभयनिष्ट भागों का क्षेत्रफल बताओ। ($\pi=३\cdot१४$)

मान लो वृत्त के केन्द्र क और ख हैं।



तथा उनके कटान विन्दु ग, घ हैं।

क ग = ख ग = क ख = त्रिज्या = ३·५ से० मी

∴ △ क ख ग एक समवाहु △ है।

∴ ∠ ग क ख = ६०°

∴ ∠ ग क घ = १२०°

∴ वृत्तखण्ड (Sector) क ग ख घ का क्षेत्रफल $=\frac{१२०}{३६०}\times\pi\times(३\cdot५)^२$

$$=\frac{\pi}{३}\times(३\cdot५)^२ \text{ वर्ग सेमी०}$$

अब क ख दोनों वृत्तों के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा है और ग घ उभयनिष्ट जीवा है इसलिये दोनों एक दूसरे के लम्ब अर्धक हैं।

∴ क च = च ख $=\frac{३\cdot५}{२}$

∴ ग च $=\sqrt{\text{क ग}^२-\text{क च}^२}=\sqrt{(३\cdot५)^२-\left(\frac{३\cdot५}{२}\right)^२}$

$$=३\cdot५\sqrt{१-\frac{१}{४}}=३\cdot५\sqrt{\frac{३}{४}} \text{ सेमी०}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$\therefore$ ग घ $=$ ३ ५ $\sqrt{३}$ सेमी०

$\therefore$ $\triangle$ क ग घ क क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}$ ग घ $\times$ क च

$$= \frac{१}{२} \times ३\cdot५ \sqrt{३} \times \frac{३\cdot५}{२}$$

$$= \sqrt{\frac{३}{४}} (३\cdot५)^२ \text{ वर्ग सेमी०}$$

अवधा (Segment) ग ख घ $=$ वृत्तखण्ड क ग ख घ $-$ $\triangle$ क ग घ

$$= \frac{\pi}{३} \times (३\cdot५)^२ - \frac{\sqrt{३}}{४}(३\cdot५)^२$$

$$= (३\cdot५)^२ \left(\frac{\pi}{३} - \frac{\sqrt{३}}{४} \right)$$

$$= (३\cdot५)^२ \left(\frac{३\cdot१४}{३} - \frac{१\cdot७३२}{४} \right)$$

$$= १२\cdot२५ \, (१\cdot०४७ - \cdot४३३)$$

$$= ७\cdot५२ \text{ वर्ग सेमी०}$$

$\therefore$ उभयनिष्ट भाग क ग ख घ का क्षेत्रफल $= २ \times ७\cdot५२ = १५\cdot०४$ वर्ग सेमी० ।

प्रश्नावली ६ (ग)

१. वृत्त खण्डों का क्षेत्रफल बताओ जिनके $\angle$ तथा त्रिज्यायें निम्न लिखित हैं ।

(क) त्रिज्या $=$ १६ सेमी० और कोण $= ६०^\circ$

(ख) त्रिज्या $=$ २·८ सेमी० और कोण $= ४५^\circ$

२. एक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ८० वर्ग सेमी० है तथा त्रिज्या १६ सेमी० है तो कोण बताओ ।

३. एक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ३२ वर्ग सेमी० है तथा $\angle ७०^\circ$ है तो त्रिज्या बताओ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

४. एक वृत्तखण्ड की त्रिज्या १५ सेमी० और चाय २८ सेमी० है तो क्षेत्रफल बताओ।

५. एक वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ७५ वर्ग सेमी० है और वृत्त का क्षेत्रफल १२५ वर्ग सेमी० है तो ∠ बताओ।

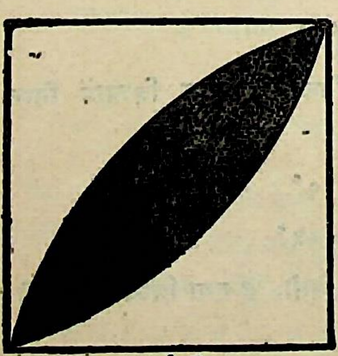
६. एक समबाहु त्रिभुज के आकृति के खेत का क्षेत्रफल $\frac{१}{२}$ एकड़ है। उसके एक शीर्ष से रस्सी द्वार एक गाय बंधी हुई है। यदि वह आधे क्षेत्रभल को चर सकती है तो रस्सी की लम्बाई बताओ।

७. तीन समान सिक्के जिनकी त्रिज्यायें ५ सेमी० है आपस में सटा कर रखे गये हैं तो उनके बीच के रिक्त स्थान का क्षेत्रफल बताओ।

८. एक घड़ी के सूइयों की लम्बाइयां ८ सेमी० तथा १० सेमी० हैं। ७ बजे से २ बजकर ४५ मिनट तक जाने में दोनों सूइयों से जनित वृत्त खण्डों के क्षेत्रफलों का अन्तर ज्ञात करो।

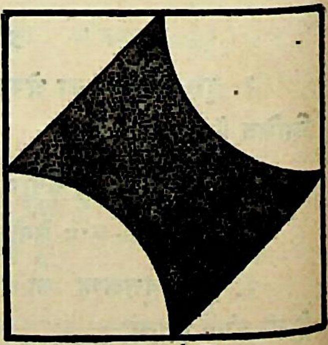
९. दो समान वृत्त जिनकी त्रिज्यायें ५ सेमी० है एक दूसरे के केन्द्र से जाती हैं तो उभयनिष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करो।

१०. निम्न चित्रों में बिन्दुमय भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



21 सेमी०

(क)



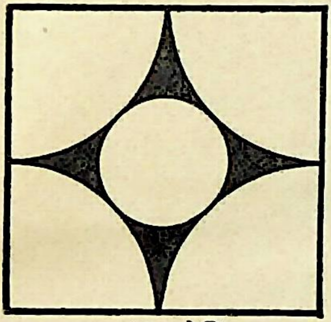
14 सेमी०

(ख)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

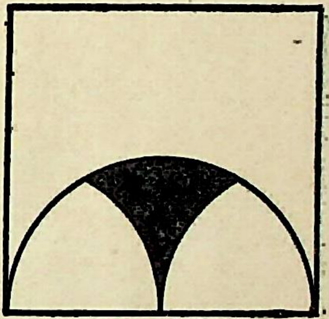
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ग)



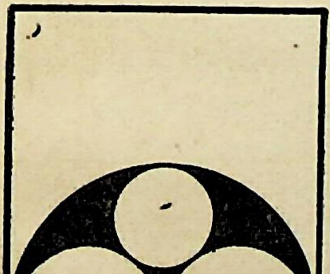
७ सेमी०

(घ)



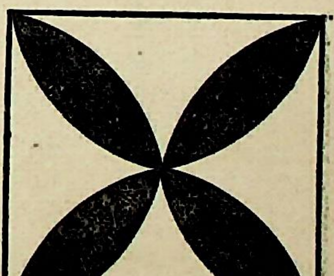
२८ सेमी०

(ङ)



१४ सेमी०

(च)



२८ सेमी०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

खण्ड २ | सांख्यिकी

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

1 परिचयात्मक (INTRODUCTORY)

सांख्यिकी की उत्पत्ति (Origin of Statistics)

सांख्यिकी को अंग्रेजी भाषा में Statistics कहते हैं। Statistics शब्द की उत्पत्ति Italian भाषा के शब्द statista से हुई है जिसका अर्थ है States-man, अर्थात् राज्य-कार्य में कुशल। सांख्यिकी का उदय और विकास मुख्यत: शासन-कार्य को कुशलतापूर्वक चलाने के लिये हुआ।

राज्यों के संगठन के साथ-साथ ही इस विषय की उत्पत्ति हुई क्योंकि शासन को सुचारु रूप से चलाने के लिये शासक को यह आवश्यक प्रतीत हुआ कि वह अपने राज्य में रहने वालों की संख्या, उनका जीवन-स्तर, उनकी आर्थिक स्थिति जाने। बाहरी आततायियों से राज्य को सुरक्षित रखने के लिये यह भी आवश्यक प्रतीत हुआ कि उसे इस बात की जानकारी हर समय रहे कि उसके राज्य में कितने जवान पुरुष हैं जो समय पर सेना में भरती किये जा सकते हैं। वही शासक लड़ाई में विजयी होता था जो अपने राज्य की सारी उपलब्धियों के आंकड़े रखता था और कमियो की व्यवस्था पहले से किये रहता था। यही संख्यात्मक आंकड़े जो प्राचीन काल में शासकों द्वारा एक विशेष उद्देश्य को लेकर एकत्रित किये जाते थे आगे चलकर सांख्यिकी शास्त्र (Statistics) के रूप में प्रचलित हुए।

सांख्यिकी (Statistics) शब्द का व्यावहारिक अर्थ :

जब शब्द का प्रयोग बहुवचन (Plural) में होता है तो इसका अर्थ समंकों (उद्देश्यपूर्ण संख्यात्मक आंकड़े) से होता है और जब इसका प्रयोग एकवचन (Singular) में होता है तो उसका अर्थ पूरे विषय से होता है अर्थात् इसका

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अर्थ समंकों (आंकड़ों) के संकलन, वर्गीकरण, सारणीकरण और इनके विभिन्न प्रयोगों से होता है।

क्षेत्र (Scpoe) :

जैसा कि पहले बताया जा चुका है आरम्भ में केवल अपने शासन को सुचारु रूप से चलाने के लिये शासक भिन्न-भिन्न संख्यात्मक आंकड़ों को एकत्रित करवाते थे। भारतवर्ष में भी अपने शासन-प्रबन्ध को प्रगतिशील बनाने के लिये चन्द्रगुप्त मौर्य ने आय-व्यय, जन्म-मरण आदि सम्बन्धी आंकड़ों को एकत्रित करने के लिये अनेक कमेटियां बनायी थीं। मुगल सम्राट अकबर के महामन्त्री टोडरमल ने भूमि की नाप कराई थी तथा लगान का प्रबन्ध किया था इसका वर्णन हमें अबुल फजल की रचना आइन-ए-अकबरी में मिलता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रारम्भ में सांख्यिकी का क्षेत्र केवल शासकों तक सीमित था परन्तु समय के साथ इसका क्षेत्र इतना बढ़ गया कि आजकल यह व्यावहारिक गणित का एक माहत्वपूर्ण अंग बन गया है। आजकल इसका उपयोग, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, मनोविज्ञान, भौतिकविज्ञान, जीवविज्ञान, कृषि-विज्ञान आदि नाना प्रकार के क्षेत्रों में सफलतापूर्वक किया जा रहा है और बहुत ही महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा रहे हैं। सांख्यिकी विषय पर सर्वप्रथम हेल्म-स्टील (Helmsteel) विश्वविद्यालय के प्राध्यापक हरमैन कॉनिंग (Herman Corning) ने व्याख्यान दिया, परन्तु विख्यात जर्मन अर्थशास्त्री गॉट फ्रेड आचेनवाल (Gott Fred Achenwall) प्रथम व्यक्ति थे जिन्होंने इस विषय के अध्ययन को एक सुव्यवस्थित रूप दिया। इसीलिये इन्हें सांख्यिकी का जन्मदाता (Father of Statistics) कहा जाता है। आगे चलकर प्रोफेसर कार्ल पियर्सन और फिशर ने विषय को बहुत देन दी हैं।

समंकों (आंकड़ों) की विशेषतायें (Characteristics of Statistics) :

(१) ये संख्यात्मक राशियां हैं—गुणात्मक व्यंजक जैसे लंगड़ा, लूला, बहरा, अन्धा, काला, गोरा इत्यादि समंक नहीं कहलाते। परन्तु इनके साथ संख्या लगा देने पर ये समंक कहलाते हैं। जैसे चार लंगड़े, पांच अन्धे इत्यादि समंक कहलायेंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२. **ये तथ्यों के समूह होते हैं**—केवल एक अंक समंक नहीं कहलाता। समंक अंकों की एक शृंखला अथवा माला (Series) को कहते हैं। जैसे किसी कक्षा के किसी विद्यार्थी द्वारा किसी विषय में प्राप्तांक को समंक नहीं कहेंगे, परन्तु कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा उस विषय में प्राप्तांकों के समूह को समंक कहेंगे।

३. **ये निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये जाते हैं**—उद्देश्यरहित आंकड़े समंक नहीं कहलाते। जैसे किसी कक्षा के विद्यार्थियों के भार को एकत्रित करने का उद्देश्य औसत भार निकालना है।

४. **ये विभिन्न कारणों से प्रभावित होते हैं**—जैसे उपज सम्बन्धी एकत्रित आंकड़े भूमि की ।किस्म, जलवायु, खाद, बीज जुताई, इत्यादि से प्रभावित होते हैं।

५. **उनकी परिशुद्धता यथोचित होनी चाहिये**—प्रत्येक जांच में परिशुद्धता का स्तर भिन्न हो सकता है। साधारण जानकारी के लिये अधिक शुद्धता पर ध्यान नहीं दिया जाता। जैसे यदि हमें कक्षा के विद्यार्थियों का औसत भार ज्ञात करना है, तो किलोग्राम तक तौल ज्ञात कर लेंगे। ग्राम, मिलीग्राम इत्यादि छोड़ देंगे और यदि औसत-ऊँचाई ज्ञात करना है तो मीटर के साथ-साथ सेन्टीमीटर वाला भाग भी अंकित करेंगे। इस प्रकार परिशुद्धता का स्तर इसमें पहले की अपेक्षा बहुत अधिक है।

६. **उनकी गणना या अनुमान किया जाता है**—यदि जाँच का क्षेत्र छोटा है तो गणना कर लेना सुलभ है और यदि जाँच का क्षेत्र बहुत बड़ा है तो अनुमान से काम लिया जाता है। ऐसा करने के लिये बहुत ही अनुभवी व्यक्तियों की आवश्यकता होती है।

७. **वे क्रमवद्ध होते हैं**—समंक एकत्रित करने में किसी विशेष पद्धति और क्रम का ध्यान रखना आवश्यक है।

८. **वे एक दूसरे से तुलना के योग्य होते हैं**—समंकों के एकत्रित करने का एकमात्र उद्देश्य तुलना करना है। इसलिये ये सजातीय होने चाहिये। जैसे

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

व्यक्तियों की आय और उनकी उम्र में किसी प्रकार की तुलना असंभव है क्योंकि ये सजातीय नहीं हैं।

सांख्यिकीय रीतियाँ (Statistical Methods)

वे सभी उपाय जिनसे अव्यवस्थित आंकड़ों को व्यवस्थित कर देने पर उनमें निहित तथ्य स्पष्ट हो जाते हैं, सांख्यिकीय रीतियाँ कहलाते हैं। इन्हीं रीतियों द्वारा समंकों को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारणों पर प्रकाश डालने का प्रयास किया जाता है। प्रमुख सांख्यिकीय रीतियाँ निम्नलिखित हैं—

१. **समंकों (आंकडों) का संकलन (Collection of Data) :** किसी भी सांख्यिकीय अनुसंधान के लिये प्रथम चरण समंकों का संकलन है। इसके अन्तर्गत वे सभी उपाय आ जाते हैं जिनसे आंकड़े एकत्रित किये जाते हैं।

२. **वर्गीकरण (Classification) :** समंकों के एकत्रीकरण के पश्चात् उनको सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने के लिये जो उपाय अपनाये जाते हैं वे सभी वर्गीकरण के अन्तर्गत आते हैं।

३. **सारणीकरण (Tabulation) :** समंकों के वर्गीकरण के पश्चात् उनको तालिका में लिखने को सारणीकरण कहते हैं।

४. **तुलना तथा सहसम्बन्ध (Comparison and Correlation) :** समंकों को सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने के पश्चात् उनकी परस्पर तुलना की जाती है। तुलना करने में विभिन्न प्रकार के माध्यों, रेखाचित्रों, लेखाचित्रों आदि का प्रयोग किया जाता है।

५. **विवेचन तथा पूर्वानुमान (Interpretation and Forecasting) :** अन्त में प्राप्त तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकालने होते हैं और निष्कर्षों के आधार पर भविष्यवाणी भी की जा सकती है।

सांख्यिकी सीमायें (Limitations of Statistics) :

सांख्यिकी एवं सांख्यिकीय रीतियों की कुछ सीमायें होती हैं जो निम्नलिखित हैं :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१) सांख्यिकी के अन्तर्गत व्यक्ति विशेष का कोई महत्व नहीं है—जैसे यदि यह कहा जाय कि एक भारतीय की औसत ऊँचाई पांच फीट छः इन्च है तो इससे किसी एक व्यक्ति की ऊँचाई का ज्ञान नहीं होता बल्कि सारे समूह की औसत ऊँचाई मालूम होती है।

(२) सांख्यिकीय नियम गणित के नियमों की भाँति सदा के लिये सत्य नहीं होते। वे अधिकांश दशाओं में सत्य हो सकते हैं किन्तु प्रत्येक दशा में सत्य नहीं हो सकते।

(३) सांख्यिकी का अध्ययन केवल संख्यात्मक राशियों से ही होता है, इसलिये ऐसी विशेषताओं का अध्ययन, जिनको संख्या से व्यक्त नहीं किया जा सकता सांख्यिकीय विधियों द्वारा नहीं हो सकता।

(४) समंकों और सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग सुचारु रूप से केवल सांख्यिकीय-ज्ञाता ही कर सकते हैं।

सांख्यिकी के उद्देश्य (Aims of Statistics)

(१) समग्र का अध्ययन (Study of the Population) : जब किसी सांख्यिकीय अनुसंधान से सम्बन्धित आंकड़ों को एकत्रित करना कठिन होता है तो समग्र की कुछ इकाइयाँ (Individuals) को न्यादर्श अर्थात् नमूने (Samples) के रूप में ले लिया जाता है। न्यादर्श के लक्षणों का अध्ययन करके समग्र के लक्षणों का ज्ञान प्राप्त कर लिया जा सकता है।

(२) विचरण का अध्ययन (Study of Variations) : समग्र के सभी व्यक्तियों के किसी विशेष लक्षण की माप समान नहीं होती, बल्कि भिन्नता पाई जाती है। जैसे किसी कक्षा के विद्यार्थियों के भार के आंकड़े एकत्रित किये जायें तो सभी के भार समान नहीं होंगे। सबसे कम और सबसे अधिक भार के ज्ञात हो जाने से वह विस्तार ज्ञात हो जायेगा जिसके अन्तर्गत सभी भार होते हैं। इस प्रकार के विस्तार सम्बन्धी गणनाओं को विचरण का अध्ययन कहते हैं।

(३) सांख्यिकी का तीसरा उद्देश्य सभी सांख्यिकीय रीतियों और उनके उपायों का अध्ययन करना है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १

१. सांख्यिकी का क्षेत्र बताओ।

२. समंकों (आकड़ों) की विशेषतायें क्या-क्या हैं ?

३. सांख्यिकीय रीतियों का वर्णन करो और इनकी सीमायें भी बताओ।

४. सांख्यिकी के उद्देश्य क्या-क्या हैं ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

2 सांख्यिकीय समंकों (आंकड़ों) का संकलन
(COLLECTION OF STATISTICAL DATA)

सांख्यिकीय समंक दो प्रकार के होते हैं :—

(१) प्राथमिक समंक (Primary data)

(२) द्वितीय समंक (Secondary data)

प्राथमिक समंक (Primary data)—वे समंक हैं जिन्हें अन्य अनुसंधान-कर्ता स्वयं एकत्रित करता है। इसे मौलिक समंक भी कहते हैं।

द्वितीय समंक (Secondary data)—वे समंक हैं जिन्हें अन्य अनुसधानकर्त्ता पहले से ही ज्ञात कर चुके होते हैं और उनका पुनः संकलन अपने कार्य के लिये दूसरे व्यक्तियों द्वारा किया जा रहा है। जैसे जनगणना सम्बन्धी समंक सरकार के लिये प्राथमिक, परन्तु उनका प्रयोग करने वाले अन्य व्यक्तियों के लिये द्वितीयक हैं।

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की विधि को प्राथमिक विधि (Primary method) और द्वितीयक समंकों को एकत्र करने की विधि को द्वितीय विधि (Secondarymethod) कहते हैं।

प्राथमिक समंकों के संकलन को विधियाँ अथवा प्राथमिक विधियाँ ये निम्न प्रकार की होती हैं :—

(१) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत जाँच (Direct personal investigation)

(२) परोक्ष मौखिक जाँच (Indirect oral investigation)

(३) स्थानीय श्रोतों और सम्पाददाताओं से सूचनायें (Information through local sources and correspondents)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(४) सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ या प्रश्नावली भरवाना (Schedules to be filled in by the informant)

(५) प्रगणकों के माध्यम से सूचना प्राप्ति (Information through enumerators)

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत जाँच—इस विधि में अनुसंधानकर्त्ता स्वयं अपने प्रयत्नों द्वारा समंकों को एकत्रित करता है। जिन व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी है, अनुसंधानकर्ता उनके पास स्वयं जाकर जाँच करता है। इसके लिये सम्बन्धित प्रदेश को भाषा, रीति-रिवाज इत्यादि का पूरा ज्ञान होना बहुत आवश्यक है। अनुसंधानकर्ता योग्य, दूरदर्शी, धैर्यवान और व्यवहार-कुशल होना चाहिये।

गुण :

१. प्राप्त समंक अत्यन्त विश्वसनीय और मौलिक होते हैं।

२. यह विधि विशेष रूप से गहन जाँच के लिये अधिक उपयुक्त है।

३. इन समंकों में सजातीयता तथा एकरूपता भी रहती है। एक ही व्यक्ति द्वारा एकत्रित किये जाने के कारण एक ही श्रेणी के समंक प्राप्त होते हैं। यदि अनेक व्यक्ति रखे जायें तो विभिन्न दृष्टिकोणों के कारण समंकों में दोष आ जाने का भय रहता है। इसके अतिरिक्त जब अनुसंधानकर्ता स्वयं स्थान पर उपस्थित रहता है तो उसे समस्या का पूरा-पूरा ध्यान रहता है।

दोष :

१. इस रीति द्वारा विस्तृत जाँच संभव नहीं है क्योंकि अकेला व्यक्ति बहुत बड़े पैमाने पर काम नहीं कर सकता।

२. इसमें बहुत अधिक समय, धन तथा श्रम लगता है।

३. इस रीति द्वारा जाँच करने में व्यक्तिगत पक्षपात (Human bias) के कारण अनेक दोष आ सकते हैं।

४. ऐसा भी संभव है कि अनुसंधानकर्ता के अध्ययन का क्षेत्र इतना छोटा हो कि वह समग्र की विशेषताओं पर समुचित प्रभाव न डाल सके।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अनुसंधान कार्य में यह आवश्यक होता है कि न्यादर्श (Sample) समग्र का प्रतिनिधित्व करे।

अप्रत्यक्ष मौखिक जाँच—यह विधि उस समय अपनायी जाती है जब कि जाँच का क्षेत्र बहुत बड़ा होता है या सूचना देने वाले व्यक्ति प्रत्यक्ष पूछताछ करने में उदासीन हों या समंक ही कुछ ऐसे पेंचीदे ढंग के हों कि उन्हें प्रत्यक्ष रूप से प्राप्त करना कठिन हो। सरकार द्वारा नियुक्त कमेटियाँ इस रीति का अधिक उपयोग करती हैं। इस रीति को प्रयोग में लाते समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना आवश्यक है।

१. सूचना देने वाला व्यक्ति समंकों से सम्बन्धित पूर्ण ज्ञान रखता हो।

२. सूचना देने वाले व्यक्तियों की संख्या अधिक और भिन्न-भिन्न वर्ग से होनी चाहिये ताकि पक्षपात की संभावना कम रहे।

३. यदि सूचक अशिक्षित, असन्तुलित, मस्तिष्क वाला, आशावादी या निराशावादी है तो भ्रामक सूचनायें दे सकता है।

४. यह पता लगा लेना चाहिये कि सूचना देने वाला व्यक्ति किसी प्रकार का पक्षपात् पूर्ण मत तो नहीं रखता है।

५. सूचना देने वाले सभी व्यक्तियों के विचारों को समान महत्व देना चाहिये।

गुण :

१. कम समय और कम खर्च में बड़े पैमाने पर समंक एकत्रित किये जा सकते हैं।

२. पक्षपात की संभावना कम हो जाती है।

३. सूचना देने में जाँच सम्बन्धी रुचि न रखने वाले व्यक्तियों की सूचनायें भी प्राप्त हो जाती हैं।

दोष :

१. केवल व्यक्तिगत पक्षपात के घुसने का भय रहता है।

२. मौलिक समंक नहीं प्राप्त होते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

स्थानीय श्रोतों तथा सम्पाददताओं से सूचनायें इस रीति में अनुसंधानकर्ता स्थानीय सूचना देने वालों या संवाददाताओं के माध्यम से समंकों का संकलन करता है और उन्हें अपने काम में लाता है। यह रीति उस समय अपनायी जाती है जब तथ्यों की केवल सापेक्ष शुद्धता ही आवश्यक होती है।

गुण :

१. कम समय और कम खर्च में बहुत से क्षेत्रों की सूचनायें प्राप्त हो जाती हैं।

२. यह रीति बहुत ही सरल है।

३. यह रीति उस समय उपयोगी होती है जब अधिक परिशुद्ध सूचना की आवश्यकता नहीं होती।

दोष :

१. प्राप्त समंक अधिक विश्वसनीय नहीं होते।

२. प्राप्त समंकों में अधिक परिशुद्धता नहीं होती है।

३. मानव पक्षपात की अधिक संभावना रहती है।

सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ या प्रश्नावली भरवाना—इस रीति में जाँच के विषय से सम्बन्धित कुछ प्रश्न एक प्रश्नावली के रूप में लिख लिये जाते हैं और उसकी बहुत सी प्रतियाँ छपवा ली जाती हैं। यह प्रश्नावलियाँ डाक से उन व्यक्तियों के पास भेज दी जाती हैं जो अनुसंधान सम्बन्धी समस्या से परिचित हों। सूचना देने वाले व्यक्ति पूछे गये प्रश्नों का उत्तर लिखकर अनुसंधानकर्ता के पास भेज देते हैं। प्रश्नावली स्पष्ट, संक्षिप्त, कम गणना वाली तथा गुप्त और गहन सूचना रहित होनी चाहिये।

गुण :

१. सभी रीतियों से सरल और सस्ती है।

२. अधिक विस्तृत क्षेत्र में इसी रीति का प्रयोग किया जाता है।

३. मौलिक होने के कारण सूचनायें विश्वसनीय होती हैं।

दोष :

१. इसका प्रयोग वहीं किया जा सकता है जहाँ लोग शिक्षित हों।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२. प्रश्नावली के प्रश्नों का उत्तर लिख कर वापस करना सूचकों की इच्छा पर निर्भर है। अनुसंधान कार्य में उदासीन होने के कारण अधिकांश लोग उत्तर ही नहीं देते और जो लोग देते भी हैं उनमें बहुत से उत्तर अपूर्ण रहते हैं।

३. ऐसे भी लोग होते हैं जो किसी विशेष बात के पूछने पर बता सकते हैं परन्तु लिखकर नहीं दे सकते क्योंकि उनको भय रहता है कि कहीं स्वयं न जाल में फँस जायें।

प्रगणकों के माध्यम से सूचना प्राप्ति : इस रीति में कुशल और अनुभवी प्रगणक प्रश्नावली को लेकर स्वयं सूचना देने वालों के पास जाते हैं और उन्हें अनुसंधान का उद्देश्य समझाते हैं तथा प्रश्नावली के प्रश्नों को उन्हें अच्छी तरह से समझाकर उनसे उत्तर प्राप्त करते हैं और प्रश्नावली को स्वयं भरते हैं। इसलिये प्रगणक धैर्यवान, बुद्धिमान, ईमानदार तथा परिश्रमी होना चाहिये।

गुण :

१. विस्तृत क्षेत्र सम्बन्धी जाँच में यह सर्वोत्तम विधि है और अधिक से अधिक विश्वसनीय है।

२. अन्य विधियों की अपेक्षा अधिक प्रश्न पूछे जा सकते हैं।

दोष :

१. इस विधि में व्यय अधिक होता है और समय भी अधिक लगता है।

२. प्रगणकों को पूर्ण रूप से प्रशिक्षण की आवश्यकता होती है।

द्वितीयक समंकों के संकलन की विधियाँ अथवा द्वितीयक विधियाँ :

यह पहले ही बताया जा चुका है कि द्वितीयक समंक वे समंक हैं जिन्हें किसी अनुसंधानकर्ता ने पहले संकलित किया है और अब कोई दूसरा अनुसंधानकर्ता अपने कार्य में ला रहा है।

द्वितीयक समंकों के संकलन के स्रोत निम्नलिखित हैं :—

१. सरकारी विभागों के प्रकाशन से।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२. सरकारी कमेटियाँ या आयोग द्वारा प्रकाशित समंक।

३. अर्ध सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन तथा रिपोर्ट जैसे नगरपालिका और जिला परिषद इत्यादि के प्रकाशन।

४. विभिन्न विषयों सम्बन्धी पत्र-पत्रिकायें।

५. बैंकों, व्यापारी संघों, चैम्बर ऑफ कामर्स द्वारा प्रकाशित समंक।

६. योग्य और अनुभवी व्यक्तियों के प्रकाशित लेख।

७. श्रमिक संघ, मालिक संघ द्वारा प्रकाशित समंक।

८. अनुसंधान-शालाओं, विश्वविद्यालयों या अन्य सार्वजनिक संस्थाओं द्वारा किये गये अनुसंधान कार्यों की रिपोर्ट।

९. बाजार समाचार।

द्वितीयक समंकों के उपयोग में सावधानियाँ

द्वितीयक समंकों का उपयोग अन्धविश्वासियों की तरह नहीं करना चाहिये। उपयोग के पहले यथासम्भव उनकी जाँच कर लेनी चाहिये। जाँच करते समय निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान देना चाहिये।

१. संकलनकारी संस्था या व्यक्ति पक्षपातरहित और विश्वासपात्र है या नहीं?

२. समंक के संकलन का उद्देश्य क्या रहा है?

३. संकलन-कर्ता योग्य और अनुभवी रहा है या नहीं?

४. संकलन करने में जो रीतियाँ प्रयोग में लाई गई हैं विश्वसनीय हैं या नहीं?

५. प्रयोग में लाई गई इकाई में सांख्यिकीय इकाई के सब गुण विद्यमान हैं या नहीं?

६. परिशुद्धता की सीमा क्या रही है?

७. कौन सा साधन प्रयोग में लाया गया है?

८. संकलित समंक पर समय और परिस्थिति का क्या प्रभाव पड़ रहा है?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जैसे लोगों के रहन-सहन आदि में, राजनीतिक परिस्थितियों के कारण तथा कृषि विधियों में भौगोलिक परिवर्तन तथा नये अनुसंधानों के कारण परिवर्तन हो सकता है।

अनुसूचियाँ (Schedules)

ये दो प्रकार की होती हैं :—

१. प्रश्नावली (Questionnaire)—इसमें केवल प्रश्न लिखे होते हैं। प्रश्नों के उत्तर देने का स्थान इसमें नहीं होता। उत्तर दूसरे कागज पर लिखा जाता है।

२. निरंक प्रपत्र (Blank forms)—इनमें उत्तर देने का भी स्थान रहता है।

प्रश्नावली २

१. प्राथमिक और द्वितीयक समंक किसे कहते हैं ? इनमें क्या भेद है ?
२. प्राथमिक समंक के संकलन की विधियाँ बताओ। प्रत्येक में क्या-क्या गुण और दोष है ?
३. द्वितीयक समंकों के संकलन के भिन्न-भिन्न श्रोतों का वर्णन करो। इनको उपयोग में लाने के पहले जाँच करना क्यों आवश्यक है ?
४. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत जाँच कब उपयोगी होती है ?
५. प्रश्नावली और निरंक प्रपत्र में क्या अन्तर है ?

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

3 समंकों का वर्गीकरण और सारणीकरण (CLASSIFICATION AND TABULATION OF DATA)

प्रारम्भ में संकलित समंकों का रूप इतना विशाल और अव्यवस्थित होता है कि उसको सरल रूप देना कठिन होता है और उनके तथ्यों का भी कुछ पता नहीं चल पाता। अतः समंकों के विशाल परिमाण में लघुता लाना और उन्हें व्यवस्थित कर देना अति आवश्यक है। यह क्रिया वर्गीकरण और सारणीकरण से होती है।

वर्गीकरण (Classification)

वर्गीकरण वह सांख्यिकीय क्रिया है जो समंकों के विशाल और अव्यस्थित रूप को संक्षिप्त और सुव्यवस्थित करने के साथ-साथ उनको विभिन्न गुणात्मक अथवा संख्यात्मक वर्गों में सादृश्यता के अनुसार विभाजित करती है।

वर्गीकरण उद्देश्य

(१) एकत्रित समंकों को गुणात्मक अथवा संख्यात्मक वर्गों में विभाजित करना ताकि थोड़े ही परिश्रम से उनके तथ्य का प्रभाव मस्तिष्क पर पड़ सके।

(२) इससे समंक के पदों में सादृश्यता और विभिन्नता का ज्ञान होता है।

(३) समंकों को तुलनात्मक अध्ययन के योग्य बना दिया जाता है।

(४) सारणीकरण के लिये आवश्यक सामग्री प्रस्तुत करता है।

(५) यह ऐसे पदों के महत्व को प्रत्यक्ष कर देता है जो वर्गीकरण के पहले महत्वहीन समझे जाते हैं।

वर्गीकरण के भेद :

इसके दो भेद होते हैं :—

(१) गुणों के अनुसार वर्गीकरण (Classification according to attributes) : वे वर्गीकरण जो गुणात्मक या वर्णनात्मक लक्षण के आधार

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

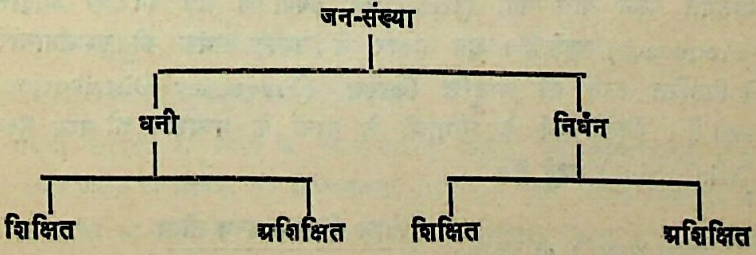
पर होते हैं उन्हें गुणों के अनुसार वर्गीकरण कहा जाता है।

(२) सम्भागान्तरों के अनुसार वर्गीकरण (Classification according to Class intervals)—वे वर्गीकरण जो संख्यात्मक लक्षणों पर आधारित होते हैं सम्भागान्तरों के अनुसार वर्गीकृत कहलाते हैं।

गुणों के अनुसार वर्गीकरण

इसमें समंकों के वर्गीकरण का आधार कोई गुणात्मक या वर्णनात्मक लक्षण होता है। किसी एक लक्षण वाले पदों को एक वर्ग में और उसी लक्षण के अनुपस्थित रहने वाले पदों को दूसरे वर्ग में रखा जाता है। उदाहरण के लिये किसी देश की जनता को लिंग (sex) के आधार पर दो भागों में विभाजित कर सकते हैं—पुरुष और स्त्रियाँ या धन के आधार पर धनी और गरीब में वर्गीकरण हो सकता है। इस प्रकार जब किसी लक्षण की उपस्थिति और अनुपस्थिति के आधार पर समंकों का वर्गीकरण किया जाता है तो ऐसे वर्गीकरण को **सरल वर्गीकरण** (Simple Classification) या द्वन्द्व भाजन वर्गीकरण (Classification by dichotomy) कहते हैं।

जब समग्र में दो से अधिक गुण विद्यमान हों तो उसे दो से अधिक वर्गों में विभाजित कर सकते हैं। ऐसे वर्गीकरण को **बहुगुण वर्गीकरण** (Manifold Classification) कहते हैं। जैसे किसी देश को धनी और गरीब में वर्गीकृत करने के बाद प्रत्येक वर्ग को शिक्षित और अशिक्षित वर्गों में बाँटा जा सकता है, जैसा कि निम्न चार्ट से स्पष्ट है :



गुणों के अनुसार वर्गीकरण बड़ा ही सरल है परन्तु यह ध्यान रखना आवश्यक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

है कि विभिन्न गुणों की स्पष्ट परिभाषा होनी चाहिये जैसे शिक्षित वर्ग में किस स्तर के लोग रक्खे जायेंगे।

सम्भागान्तरों के अनुसार वर्गीकरण

संख्यात्मक लक्षणों के आधार पर समंकों का वर्गीकरण सम्भागान्तरों के अनुसार किया जाता है, इनके समता और विषमता पर ध्यान देते हुये छोटे सम्भाग बना लिये जाते हैं। सम्भाग विस्तार स्वेच्छा से निर्धारित किया जाता है। जैसे मान लिया जाय कि किसी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्तांक ० से ५० तक विचरण करते हैं। वर्ग विस्तार १० मान कर इन्हें निम्नलिखित वर्गों में सीमाबद्ध किया जा सकता है।

०—१०, १०—२०, २०—३०, ३०—४०, ४०—५०

इस प्रकार के वर्गीकरण को सम्भागान्तरों के अनुसार वर्गीकरण कहेंगे और वर्गों को सम्भाग (Class interval) कहेंगे। वर्ग का निर्धारण दो संख्याओं से होता है। इनमें से पहले को वर्ग की निम्न सीमा (Lower limit) और दूसरे को उच्च सीमा (Upper limit) कहते हैं। उदाहरण में ०, १०, २०, ३०, ४० भिन्न वर्गों की निम्न सीमा और १०, २०, ३०, ४०, ५०, उन्हीं वर्गों की उच्च सीमा है। उच्च और निम्न सीमा के अन्तर को सम्भाग विस्तार (Width or magnitude of the class interval) कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में सम्भाग विस्तार १० हैं। प्रत्येक वर्ग के अन्तर्गत पड़ने वाले पदों (Items) की संख्या को उस वर्ग की आवृत्ति (Frequency) कहते हैं। इस प्रकार से समस्त समंक को सम्भागान्तरों में वितरित करने को आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution) कहते हैं। किसी वर्ग के सीमाओं के मानों के मध्यमान को मध्य मूल्य (Mid Value) कहते हैं।

$$\text{मध्य मूल्य (Mid Value)} = \frac{\text{निम्न सीमा} + \text{उच्च सीमा}}{२}$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सारणीकरण (Tabulation)

वर्गीकरण के पश्चात् संख्यात्मक समंकों को एक उपयुक्त क्रम से पंक्तियों और स्तम्भों में वन्द कर देने को सारणीकरण कहते हैं। ऐसा कर देने से समंकों के तथ्य का प्रभाव सुगमता से मस्तिष्क के ऊपर पड़ने लगता है।

सारणीकरण से लाभ

(१) इसके द्वारा विशाल समंकों को व्यवस्थित क्रम में रक्खा जा सकता है।

(२) इससे समय और स्थान की बचत होती है।

(३) शीर्षकों को वार-वार लिखने की आवश्यकता नहीं पड़ती है।

(४) जोड़ना-घटाना सुगम हो जाता है।

(५) सारणियों में दिये गये आँकड़ों को याद करना सरल है।

(६) सारणियों में अनुपात प्रतिशत, गुणक आदि का भी प्रयोग किया जा सकता है। इसलिये तुलनात्मक अध्ययन बड़ा सरल हो जाता है।

सारणीकरण के भेद

(१) साधारण या एकगुण सारणीकरण (Single Tabulation)

(२) द्विगुण सारणीकरण (Double Tabulation)

(३) त्रिगुण सारणीकरण (Treble Tabulation)

(४) बहुगुण सारणीकरण (Manifold Tabulation)

साधारण या एकगुण सारणीकरण

ऐसी सारणी से समंक के केवल एक ही लक्षण का स्पष्टीकरण होता है। इसमें केवल दो स्तम्भों की आवश्यकता होती है। जैसे किसी विद्यालय के समस्त छात्रों की संख्या को विभिन्न कक्षाओं के अनुसार व्यक्त, करने के लिये निम्न रूप से सारणी बनावेंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

विद्यालय के विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्या व्यक्त करने वाली सारणी—

कक्षा	छात्रों की संख्या
१	२
१. तीसरी	....
२. चौथी	....
३. पाँचवीं	....
....	....
....	....
१२. बारहवीं	....

द्विगुण सारणीकरण

ऐसी सारणी से समंकों के दो गुणों का स्पष्टीकरण होता है। उपरोक्त उदाहरण में यदि यह सूचना भी प्राप्त करनी है कि प्रत्येक कक्षा में कितने लड़के और कितनी लड़कियाँ हैं और विद्यालय में इनकी अलग-अलग क्या संख्या है, तो द्विगुण सारणी का रूप निम्न होगा।

कक्षा और लिंग भेद के अनुसार विद्यालय के छात्रों की संख्या व्यक्त करने वाली सारणी—

कक्षा	छात्रों की संख्या		योग
	लड़के	लड़कियाँ	
१	२	३	४
१. तीसरी	....	....	....
२. चौथी	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
१२. बारहवीं	....	....	....
योग			

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

त्रिगुण सारणी

ऐसी सारणी में समंकों के तीन गुणों का स्पष्टीकरण किया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में यदि दो गुणों के अतिरिक्त यह भी ज्ञात करना हो कि स्थानीय और बाहर से आये हुये लड़के और लड़कियों की क्या संख्या है—तो इसे त्रिगुण सारणी से व्यक्त करेंगे, जिसका रूप निम्न होगा।

कक्षा, लिंग भेद और निवास स्थान के अनुसार विद्यालय के छात्रों की संख्या व्यक्त करने वाली सारणी :—

कक्षा	छात्रों की संख्या						योग		
	लड़के			लड़कियाँ					
	स्थानीय	बाहरी	योग	स्थानीय	बाहरी	योग	स्थानीय	बाहरी	योग
१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
१. तीसरी	....	...	....	....	...	...	...	...	...
२. चौथी	....	....	...	...	...	...	...	...	...
३. पाँचवी	....	....	....	....	...	...	...	...	...
... .	....	....	....	.....	...	...	...	...	...
.. ..	.....	....	....	....	...	...	...	...	...
....	.....	....	....	....	...	...	...	...	...
१२. बारहवीं	....	....	...	....	...	...	...	...	...
योग									

बहुगुण सारणी

ऐसी सारणी में तीन से अधिक गुणों का स्पष्टीकरण किया जाता है। जैसे—उपर्युक्त उदाहरण के तीन गुणों के अतिरिक्त यदि यह भी सूचना देनी हो कि प्रत्येक में कितने परिगणित जाति के हैं; कितने पिछड़ी जाति के और कितने अन्य जाति के हैं—तो निम्न रूप से बहुगुण सारणी बनावेंगे।

कक्षा, लिंग भेद, निवास स्थान और जाति के अनुसार विद्यालय के छात्रों की संख्या व्यक्त करने वाली सारणी :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

कक्षा	जाति	छात्रों की संख्या						योग		
		लड़के			लड़कियाँ					
		स्थानीय	बाहरी	योग	स्थानीय	बाहरी	योग	स्थानीय	बाहरी	योग
१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११
१. तीसरी	प० ग० पि० अन्य									
	योग									
२. चौथी	प० ग० पि० अन्य									
	योग									
....										
	योग									
१२. बारहवीं	प० ग० पि० अन्य									
	योग									
योग										

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सारणीकरण के नियम और सावधानियाँ

सुव्यवस्थित प्रदर्शन के साथ-साथ समंक सम्बन्धी अधिक से अधिक सूचना देने वाली सारणी सबसे अच्छी मानी जाती है। अतः सारणी बनाते समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना अति आवश्यक है—

(१) प्रत्येक सारणी के ऊपर एक स्पष्ट शीर्षक (Heading) होनी चाहिये जो सारणी के अन्तर्गत दी गई सूचनाओं पर प्रकाश डाल सके।

(२) प्रत्येक स्तम्भ के ऊपर भी एक-एक स्पष्ट उपशीर्षक (Caption) होनी चाहिये और यथासम्भव इन्हें पड़ी रेखाओं के समानान्तर लिखना चाहिये।

(३) सारणी में कितने स्तम्भों की आवश्यकता होगी पहले से ही निश्चित कर लेना चाहिये। प्रत्येक सूचना के लिये अलग-अलग स्तम्भ होना चाहिये। परन्तु इस बात का ध्यान अवश्य रखना चाहिये कि स्तम्भों की संख्या अधिक न हो जाय। ऐसा होने से सारणी जटिल और अस्पष्ट हो जाती है।

(४) यदि अधिक सूचना प्रदर्शित करनी हो तो इन्हें भिन्न अनुसारणी (Subtables) से प्रकट करना चाहिये।

(५) प्रत्येक स्तम्भ के शीर्षक के नीचे उस स्तम्भ की क्रम संख्या होनी चाहिये।

(६) इसका आकार ऐसा चुनना चाहिये कि एक ही पृष्ठ पर आ जाय।

(७) सारणी में समान और असमान समंकों का प्रदर्शन इस प्रकार करना चाहिये कि इनका तुलनात्मक अध्ययन भी हो सके।

(८) यदि गुणक, अनुपात और प्रतिशत भी व्यक्त करना है तो इन्हें सम्बन्धित समंकों के साथ ही रखना चाहिये।

(९) समंकों की इकाइयाँ जैसे रु०, किलोग्राम, इन्च, सैकड़ा, हजार, लाख इत्यादि स्तम्भों के शीर्षक के साथ ऊपर ही लिख देना चाहिये।

(१०) महत्वपूर्ण सूचनाओं की ओर लोगों का ध्यान आकृष्ट करने के लिये इन्हें लाल स्याही या मोटे या टेढ़े अक्षरों से लिखना चाहिये।

(११) सारणी मितव्ययी, श्रम और समय बचाने वाली होनी चाहिये।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(१२) समंक सम्बन्धी यदि कोई विशेष सूचना जैसे सम्भावित त्रुटियाँ आदि हैं तो उसे सारणी के नीचे टिप्पणी में दे देना चाहिये।

सांख्यिकी में कुछ उपयोगी पदों की परिभाषायें —

(क) चर राशि (Variable) : ऐसी राशियाँ जो कोई भी मान ग्रहण कर सकती हैं चर राशियाँ कहलाती हैं। जैसे भार, ऊँचाई, पेड़ों के फल इत्यादि।

(ख) संतत चर राशि (Continuous Variable) : ऐसी चर राशि जो किसी दिये हुये विस्तार (Interval) में प्रत्येक मान ग्रहण कर सकती है संतत चर राशि कहलाती है। जैसे ऊँचाई, मूल्य, वर्षा, आयु इत्यादि।

(ग) असंतत चर राशि (Discontinuous Variable) : खंडित मानों को ग्रहण करने वाली चर राशि को असंतत चर राशि कहते हैं। जैसे पेड़ों के पत्ते या फूल की पंखुड़ियाँ, कक्षा के विद्यार्थी, गाड़ी में डिब्बे, मकान में कमरे, परिवार इत्यादि।

(ग) सांख्यिकीय माला (Statistical Series) : समंकों को किसी नियम के अनुसार व्यवस्थित करने के फलस्वरूप जो श्रेणी प्राप्त होती है उसे सांख्यिकीय माला कहते हैं। जैसे किसी कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांक के क्रमिक समूह को सांख्यिकीय माला कहते हैं।

इसके तीन भेद हैं—

(१) कालान्तर माला (Time Series)

(२) स्थानिक माला (Spatial Series)

(३) परिस्थिति माला (Condition Series)

कालान्तर माला

समय अर्थात् दिन, मास और वर्ष के आधार पर समंकों का वर्गीकरण किया जाता है तो इसके फलस्वरूप प्राप्त माला को कालान्तर माला कहते हैं। इसे ऐतिहासिक माला (Historical Series) भी कहते हैं। जैसा कि निम्न सारणी से प्रदर्शित है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सहकारी समिति उदय प्रताप कालेज, वाराणसी १९५९ से १९६३ तक का आय-व्यय

वर्ष	आय रुपयों में	व्यय रुपयों में
१९५९	१,८७,६३०	१,७४,९८३
१९६०	१,९५,७३२	१,८१,८२९
१९६१	१,८९,०१७	१,८४,८७३
१९६२	१,८६,३३१	१,७५,४१५
१९६३	२,४५,७४९	२,३०,६२६

स्थानिक माला

भौगोलिक आधार पर जब समंकों का वर्गीकरण किया जाता है, तो इसके फलस्वरूप प्राप्त श्रेणी को स्थानिक माला कहते हैं।

उदाहरण निम्नलिखित है :

भारत में भूमि क्षेत्रफल

प्रदेश	करोड़ एकड़ में
१—हिमाचल प्रदेश	१५·२६
२—उत्तरी मैदानी प्रदेश	१८·९२
३—दक्षिणी पहाड़ी तथा पठारी प्रदेश	३३·२९
४—पश्चिमी घाट तथा तटीय प्रदेश	६·९५
५—पूर्वी घाट तथा तटीय प्रदेश	६·६३
६—अण्डमन तथा नीकोबार द्वीप	०·२१
योग	८१·२६

परिस्थिति माला

किसी परिस्थिति में होने वाले परिवर्तनों के आधार पर जब समंकों का

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वर्गीकरण किया जाता है तो इससे प्राप्त श्रेणी को परिस्थिति माला कहते हैं। इनके दो भेद हैं :—

(१) विच्छिन्न या खण्डित माला (Discrete Series)

(२) अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

विच्छिन्न या खण्डित माला :

जब किसी सांख्यिकीय माला के पदों (Items) का माप पूर्ण परिशुद्धता के साथ किया जा सकता है अर्थात् इनकी इकाइयाँ किसी और छोटी इकाइयों में विभक्त नहीं की जा सकतीं तो ऐसी सांख्यिकीय माला को विच्छिन्न या खण्डित माला कहते हैं। जैसे किसी परिवार में बच्चों की संख्या, प्रतिदिन की घटनायें, चिड़ियों द्वारा दिये गये अण्डों की संख्या इत्यादि।

सन्तत या अविच्छिन्न माला :

जब किसी सांख्यिकीय माला के पदों का माप पूर्ण परिशुद्धता के साथ नहीं किया जा सकता अर्थात् इनकी इकाइयों को अन्य छोटी छोटी इकाइयों में विभक्त किया जा सकता हो तो ऐसी सांख्यिकीय माला को सन्तत माला कहते हैं। ऐसी माला के पदों के मूल्यों में बहुत कम अन्तर होता है। उन्हें सम्भागों में इस प्रकार बाँटा जा सकता है कि सम्भागों के बीच अवकाश नहीं रहता है बल्कि उनमें सन्तता आ जाती है। जैसे ऊँचाई, भार, मजदूरी, उत्पादन इत्यादि।

आवृत्ति (Frequency) : किसी सांख्यिकीय माला में एक ही मूल्य के पद जितने बार आते हैं उसे उस पद की आवृत्ति कहते हैं। जैसे यदि किसी कक्षा में १·५ मीटर वाले आठ विद्यार्थी हैं तो १·५ मीटर की आवृत्ति ८ होगी।

आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution) :

जब समंकों को आरोही (Ascending) या अवरोही (Descending) क्रम में विन्यस्त कर लेने के बाद एक उचित सम्भाग विस्तार मानकर उन्हें भिन्न भिन्न सम्भागों में बाँट दिया जाता है और प्रत्येक सम्भागान्तर की आवृत्ति उनके सीध में, अलग स्तम्भ में लिख दी जाती है; तो इस प्रकार से प्राप्त सांख्यिकीय श्रेणी को आवृत्ति वितरण कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

आवृत्ति सारणी (Frequency Table)

आवृत्ति वितरण को जिस सारणी में प्रदर्शित करते हैं उसे आवृत्ति सारणी कहते हैं।

इसके दो भेद होते हैं—

(१) साधारण आवृत्ति सारणी (Simple Frequency Table)

(२) संचयी आवृत्ति सारणी : (Cumulative Frequency Table)।

साधारण आवृत्ति सारणी : इससे खंडित और संतत दोनों मालाओं को प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण १.

किसी कक्षा के २० छात्रों के पास पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है, तो आवृत्ति सारणी बनाओ।

२, ५, ७, ८, ३, २, २, ५, ४, ४, ३, ७, ५, ८, ३, ५, ३, ५, ४, ७

आवृत्ति सारणी (खंडित माला)

किताबें (चर राशि)	लड़के (आवृत्ति)
२	३
३	४
४	३
५	५
६	०
७	३
८	२

उदाहरण २.

गणित में ५० विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं, तो इनका सारणीकरण आवृत्ति वितरण के रूप में उचित सम्भागान्तरों के साथ करो—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५	१९	१०	९५	९२	९८	१२	०	१५	२०
४०	७०	७५	१२	०	१३	९०	३२	५४	७६
३७	१८	४३	६५	५७	७३	५३	५५	८१	३३
३५	४१	२७	३६	४७	४५	९	१९	२५	५०
६३	६७	८४	४९	३१	६८	५८	४२	११	३९

उपरोक्त प्रश्न में आवृत्ति सारणी दो विधियों से बनायी जा सकती है।

(१) अपवर्जी रीति (Exclusive Method)

(२) समावेशिक रीति (Inclusive Method)

अपवर्जी रीति : इस रीति में प्रत्येक सम्भागान्तर की निम्न सीमा अपने से पहले वाले सम्भागान्तर के उच्च सीमा के बराबर होती है और उच्च सीमा के बराबर मूल्य वाले पद को अगले सम्भाग में रक्खा जाता है। चूँकि वह पद उस सम्भाग से वर्जित कर दिया जाता है, इसलिये इस रीति को अपवर्जी रीति कहते हैं।

टिप्पणी : सारणी बनाते समय एक-एक पद के लिये खड़ी पाई का एक-एक चिह्न देते हैं। इस प्रकार चार चिह्न के बाद पाँचवें के लिये तिरछी पाई से पहले चार चिह्नों को काट देते हैं। जिससे पाँच-पाँच के समूह बन जाते हैं। इससे गिनने में सुविधा होती है। इस चिन्ह को टैली चिह्न कहते हैं।

गणित में ५० विद्यार्थी के प्राप्तांकों का अपवर्जी रीति से वर्गीकरण

सम्भागान्तर (Class Interval)	पदों की संख्या (No. of Occurences)	आवृत्ति (Frequency)
०— १०	||||	४
१०— २०	~~||||~~ ||||	९
२०— ३०	|||	३
३०— ४०	~~||||~~ ||	७
४०— ५०	~~||||~~ |	७
५०— ६०	~~||||~~ |	६
६०— ७०	||||	४
७०— ८०	||||	४
८०— ९०	||	२
९०—१००	||||	४
योग		५०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

समावेशिक रीति :

इस रीति में प्रत्येक सम्भागान्तर के निम्न और उच्च सीमाओं के बराबर मान रखने वाले पदों को उसी सम्भाग के अन्तर्गत रक्खा जाता है। इसलिये इसे समावेशिक रीति कहते हैं। किन्तु इसमें दो दोष होते हैं। पहला दोष तो यह है कि विभिन्न वर्गों की सन्तता टूट जाती है तथा दूसरा दोष यह है कि यदि किसी पद का मूल्य किसी वर्ग की ऊपरी सीमा और अगले वर्ग की निचली सीमा के अन्तर्गत है, तो उसे किस वर्ग में रखना चाहिये इसका संकेत नहीं मिलता। जैसे यदि किसी पद का मूल्य ९·७ है, तो यह बतलाना कठिन है कि इसे पहले में रक्खा जाय या दूसरे में। ऐसी स्थिति में इस रीति का प्रयोग नहीं करना चाहिये।

उपरोक्त उदाहरण में समावेशिक विधि से आवृत्ति सारणी बनाना :—

गणित में ५० विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का समावेशी रीति से वर्गीकरण

सम्भागान्तर	पदों की संख्या	आवृत्ति
०—९	IIII	४
१०—१९	卌 IIII	९
२०—२९	III	३
३०—३९	卌 II	७
४०—४९	卌 II	७
५०—५९	卌 I	६
६०—६९	IIII	४
७०—७९	IIII	४
८०—८९	II	२
९०—९९	IIII	४
योग		५०

संचयी आवृत्ति सारणी—इस प्रकार की सारणी में किसी सम्भागान्तर के बीच में एक स्तम्भ में उसकी वास्तविक आवृत्ति और दूसरे स्तम्भ में

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रारम्भिक सम्भागान्तर से लेकर उस सम्भागान्तर तक की आवृत्तियों का योग (जिसे संचयी आवृत्ति कहा जाता है) लिख दिया जाता है। इस तरह अन्तिम सम्भागान्तर की संचयी आवृत्ति सभी पदों के योग के बराबर हो जाती है।

उपरोक्त उदाहरण की संचयी आवृत्ति सारणी

सम्भागान्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
०—१०	४	४
१०—२०	८	१२
२०—३०	३	१५
३०—४०	७	२२
४०—५०	८	३०
५०—६०	६	३६
६०—७०	४	४०
७०—८०	४	४४
८०—९०	२	४६
९०—१००	४	५०

इसी प्रकार समावेशिक रीति से बनाई गई आवृत्ति सारणी से भी संचयी आवृत्ति सारणी बनायी जाती है।

प्रश्नावली ३

१. सांख्यिकीय समंकों के वर्गीकरण और सारणीकरण का महत्व बताओ।
२. वर्गीकरण के कौन-कौन से भेद हैं ? उदाहरण सहित समझाओ।
३. वर्गीकरण की परिभाषा दो और उसका उद्देश्य बताओ।
४. सारणीकरण की परिभाषा दो और उसका लाभ बताओ। इसके कौन-कौन से भेद हैं ? सारणी बनाकर समझाओ।
५. सारणीकरण के नियम तथा सावधानियों का उल्लेख करो ?
६. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(क) सन्तत माला (ख) खण्डित माला (ग) आवृत्ति वितरण (घ) अपवर्जी रीति (च) समावेशिक रीति (छ) संचयी आवृत्ति सारणी (ज) त्रिगुण और बहुगुणी।

७. सांख्यिकीय समंकों के 'सारणीकरण' के उद्देश्य की व्याख्या कीजिये। किसी स्थान के जन समुदाय का आयु, लिंग तथा वैवाहिक स्थिति के अनुसार वितरण दिखलाने के लिये एक सारणी का प्ररूप बनाइये।

८. उत्तर प्रदेश के सात प्रमुख नगरों की जनसंख्या को लिंग, भेद तथा चार धर्मों के अनुसार पाँच आयु वर्गों में विभाजित करने के लिये एक निरक्त सारणी (Blank Table) बनाइये ?

९. गणित में १०० विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं : १० अंकों के सम्भागान्तर के साथ आवृत्त सारणी, अपवर्जी और समावेशिक दोनों रीतियों से बनाओ :—

३३	५५	९१	६८	२४	३९	७२	४२	१९	७५
६१	६३	४५	२९	०	११	७६	५१	३९	९५
१३	७१	२२	१२	४१	२३	५	७८	६६	३६
१६	९२	४५	४३	६३	६०	७७	४०	८०	४४
१९	३८	३७	४६	७२	४३	४४	६७	५१	५०
४७	५३	३५	२७	३७	५४	६	५९	८२	१७
८०	६९	२९	२५	८३	५०	६१	९१	३३	११
५५	६५	५७	७६	५८	२७	४६	७४	८७	८६
४०	१०	३३	६३	८६	५३	३८	७१	७३	२७
८४	८३	७३	८४	४३	५८	३६	७६	६५	३५

१०. सांख्यिकी में ५० विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं : न्यूनतम वर्गान्तर (०—१०) लेकर इनका सारणीकरण एक आवृत्ति वितरण के रूप में कीजिये :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७०	७६	९०	६०	५५	८७	२५	५३	८०	१०
५२	९०	७०	७०	८८	६९	४५	४२	६०	७९
३५	३३	३३	५०	७०	५५	५५	२०	५३	५२
७८	६०	५०	३३	३०	४५	६५	८०	३९	६०
९८	५०	६०	९०	५०	२५	८०	६०	१०	३७

११. निम्नलिखित प्राप्तांकों को न्यूनतम वर्गान्तर (१०—१०) लेकर एक आवृत्ति वितरण में अनुविन्यासित कीजिये।

३	८४	६१	८७	४३	८५	६२	७८	६९	४७
८१	८८	५९	७६	३३	७५	५७	४९	५१	६९
५८	८१	५८	४३	७६	८०	६४	५५	२२	६३
५१	८७	५७	८३	९५	४[illegible]	७०	६४	७८	५[illegible]
८५	६७	७५	४०	७३	८५	९५	९२	८०	९१
७५	६५	७०	७३	६५	४३	५७	७३	३६	३३
६१	६२	८४	८६	७७	२९	७८	७३	७०	६९
७०	६१	९१	७३	७२	७२	५०	९६	८५	२०

१२. ५ के सम्भागान्तर के साथ निम्नलिखित ५० पौदों की ऊँचाई को आवृत्ति सारणी से प्रदर्शित करो।

ऊँचाई सेमी० में :—

६५	७०	६९	६०	६६	६८	६४	६२	६६	६८
६७	६२	६८	६२	६०	६६	६७	६१	६१	६६
६०	६५	६७	६१	६५	६७	६५	६०	६५	६०
६३	६१	६५	६३	६६	६५	६४	६८	६७	६१
६९	६७	६[illegible]	६७	६९	६४	६३	६५	६१	६४

—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

4 समंकों का रेखाचित्रीय और लेखाचित्रीय प्रदर्शन (DIAGRAMMATIC AND GRAPHICAL REPRESENTATION OF DATA)

समंकों के तथ्य को सरलतापूर्वक समझाना सांख्यिकी का एक प्रमुख उद्देश्य है। विगत अध्यायों में वर्गीकरण और सारणीकरण द्वारा उनकी विशालता को घटाकर सरल रूप देने की विधियों के वर्णन में इसी उद्देश्य की पूर्ति का प्रयास किया गया है। परन्तु सर्वसाधारण को (जो गणित में रुचि नहीं रखते) इनके द्वारा समझाना कठिन है। इसीलिये इन्हें समझने के लिये कोई ऐसा उपाय होना चाहिए जिससे मस्तिष्क पर अधिक दबाव न पड़े। आँखों के माध्यम से मस्तिष्क किसी भी तथ्य को शीघ्र ग्रहण करता है। चित्र आँखों को अधिक प्रिय लगते हैं और इनका प्रभाव मस्तिष्क पर बड़ी सरलता से पड़ता है। संख्याओं की लम्बी तालिकायें मस्तिष्क के लिये भार स्वरूप होती हैं परन्तु चित्र तथ्यों को शीघ्र ग्राह्य तथा मनोरंजक बनाकर दृष्टिमात्र से ही पूरे समंक का महत्त्व समझाने में सहायक होते हैं। चित्रों से समंकों का तुलनात्मक अध्ययन बड़ा ही सरल है। परन्तु इतना होते हुए भी चित्र सारणियों का स्थान ग्रहण नहीं कर सकते क्योंकि सारणियों से समंकों के तथ्यों का स्पष्टीकरण अधिक परिशुद्धता से किया जा सकता है।

रेखा-चित्रों द्वारा समंको को प्रस्तुत करने का महत्व

१. **आकर्षक एवं प्रभावोत्पादक :** चित्रों में यह विशेषता होती है कि वह प्रत्येक व्यक्ति का ध्यान अपनी ओर आकर्षित कर लेते हैं। समंकों की लम्बी तालिकायें पढ़ना और उनमें से कुछ को याद करना बड़ा ही कठिन होता है। परन्तु चित्रों के द्वारा अनेक बातें मानस पटल पर स्थायी रूप से अंकित हो जाती हैं। चित्रों में कई प्रकार के रंगों का प्रयोग किया जाता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जिससे उनका आकर्षण तथा प्रभाव और भी बढ़ जाता है। विज्ञापन और प्रचार आदि को अधिक प्रभावशाली बनाने के लिये चित्र अधिक लाभप्रद होते हैं। सरकार कृषि, उत्पादन, आयात-निर्यात, आर्थिक नियोजन इत्यादि से सम्बन्धित समंकों का प्रदर्शन करने के लिए चित्रों का विशेष रूप से उपयोग करती है। बीमा कम्पनियाँ, औषधि कम्पनियाँ बोतलों पर और अन्य संस्थायें जैसे रेलवे और बैंक आदि भी विज्ञापन के लिये चित्रों आदि का अधिक प्रयोग करती हैं।

२. शीघ्र बुद्धि ग्राह्य : चित्रों द्वारा प्रस्तुत किये गये समंक अधिक बुद्धि ग्राह्य होते हैं। जैसे यदि किसी उर्वरक का पौधों पर प्रभाव साधारण कृषकों को समझाना है, तो चित्रों का माध्यम सब से उत्तम है। बिना उर्वरक दिये और उर्वरक दिये हुये पौधों का चित्र साथ-साथ बना देने से उसे देख कर वह उसका लाभ तुरन्त समझ जाता है।

३. तुलना अधिक सरल : समंकों की तुलना करनी हो तो उनके चित्र बनाकर करने से देखने वालों को यह तत्काल ज्ञात हो जाता है कि कौन-सा मद अधिक महत्वपूर्ण है। अंकों से यह कार्य इतना सरल नहीं है। दो कारखानों की उत्पादन क्षमता यदि उचित दंडों से प्रस्तुत कर दी जाय तो उनकी ऊँचाई देखने से यह तुरन्त ज्ञात हो जाता है कि कौन-सा उन्नति पर है।

४. सर्वोपयोगी : चित्र द्वारा सभी शास्त्रों में विभिन्न सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जा सकता है। जिससे जटिल से जटिल सिद्धान्तों को समझने में सुविधा हो जाती है। भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान तथा गणित के जटिल से जटिल सिद्धान्तों और प्रश्नों को चित्रों से समझाना सरल हो जाता है। पारिवारिक आय-व्यय, भौगोलिक समंकों अथवा कृषि शास्त्र में उत्पत्ति की मात्रा आदि को चित्रों द्वारा दिखलाने से सहज हो जाता है।

५. समय की बचत : चित्रों से समंकों का तथ्य बहुत ही कम समय में स्पष्ट हो जाता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

अच्छे चित्र की विशेषतायें :

१. इसका आकार न बहुत बड़ा और न बहुत छोटा ही होना चाहिये क्योंकि बड़ा होने पर भद्दा प्रतीत होता है और छोटा अनुपयुक्त होता है।

२. एक ही चित्र में भिन्न-भिन्न तथ्यों को प्रदर्शित करने के लिये भिन्न-भिन्न रंग या चिह्न का प्रयोग करना चाहिये और इनकी सूची नीचे दे देनी चाहिये।

३. चित्र का शीर्षक छोटा तथा स्वयं स्पष्ट होना चाहिये।

४. चित्र में अधिक महत्वपूर्ण बातों को चटकीले रंग या खूब घने चिह्न से दिखाना चाहिये।

५. चित्र में समंक सम्बन्धी सब तथ्यों का समावेश होना चाहिये। ताकि तुलना करने में किसी प्रकार की कमी न हो।

६. चित्र में प्रयुक्त किया गया माप उपयुक्त एवं सब आकारों के लिये समान होना चाहिये। अन्यथा तुलना करना असम्भव होगा।

७. चित्र में सम्बन्धित अंकों को यथा स्थान दिखला देना चाहिये और आवश्यक टिप्पणियाँ भी दे देनी चाहिये। ताकि कोई बात उलझी न रहे।

८. चित्र स्वच्छ तथा सुन्दर होना चाहिए।

रेखा-चित्रों के भेद :

समंकों के तथ्यों को निम्न प्रकार के रेखा-चित्रों से प्रदर्शित किया जाता है—

१. एक विमितीय चित्र (One-dimensional diagram)
२. द्वि-विमितीय चित्र (Two-dimensional diagram)
३. त्रिविमितीय चित्र (Three-dimensional diagram)
४. चित्र लेख (Pictogram)

एक विमितीय चित्र (One dimensional diagram)

इस प्रकार के चित्र बनाने में केवल एक विमिति अर्थात् रेखाओं या दण्डों की लम्बाई से काम लिया जाता है। यद्यपि दंडों में चौड़ाई भी दिखाई जाती

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

है परन्तु उसका कोई महत्व नहीं रहता है। केवल स्पष्टता लाने के लिये ही चौड़ाई रखी जाती है। इसीलिये सब दंडों की चौड़ाई समान, परन्तु लम्बाई समंकों के मान के अनुसार रखी जाती है।

एक विमितीय चित्र के भेद निम्नलिखित हैं :—

(क) साधारण दंड-चित्र (Simple bars) : ऐसे दण्ड-चित्रों से केवल एक ही गुण का प्रदर्शन किया जा सकता है। दंडों का निर्माण साधारण या वर्गांकित पत्र पर कर सकते हैं। दंडों की लम्बाई समंकों के मूल्य के समानुपाती रखी जाती है। साधारणत: लम्बाई र-अक्ष के समान्तर और चौड़ाई य-अक्ष के समान्तर ली जाती है। इस बात का विशेष ध्यान रखना चाहिये कि दंडों को बनाते समय पैमावे का शून्य सभी के य-अक्ष पर रहे अन्यथा स्पष्टीकरण अशुद्ध होगा। एक दंड को दूसरे से अलग दर्शाने के लिये उनके बीच कुछ स्थान छोड़ देना चाहिये।

उदाहरण—

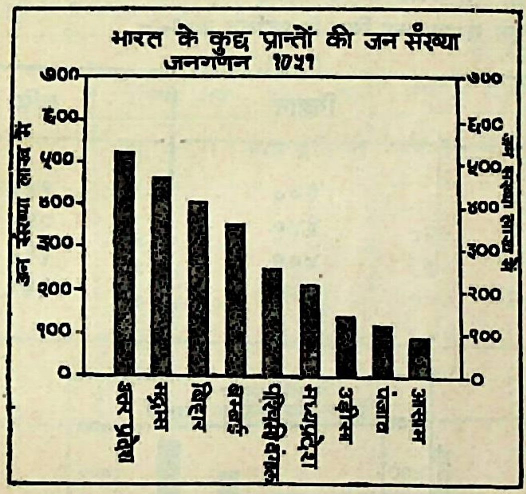
निम्नलिखित समंकों को रेखा-चित्र से प्रदर्शित करो—

सन् १९५१ की जनगणना के अनुसार भारत के कुछ प्रान्तों की जनसंख्या—

प्रान्त	जनसंख्या (लाख में)
आसाम	९०·४४
बिहार	४०२·२६
पंजाब	१२६·४१
बम्बई	३५९·५६
मद्रास	५७०·१६
मध्य प्रदेश	२१२·४८
पश्चिमी बंगाल	२४८·१०
उड़ीसा	१४६·४६
उत्तर प्रदेश	६३२·१६

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri



चित्र १

(ख) संयुक्त दण्डचित्र (Multiple or Compound Bardiagram) : किसी स्थान के विभिन्न गुण वाले समंकों का या भिन्न-भिन्न काल के समान गुण वाले विभिन्न स्थानों के समंकों का जब तुलनात्मक अध्ययन करना होता है, तो संयुक्त दण्ड-चित्र का प्रयोग किया जाता है। भिन्न-भिन्न गुण वाले समंकों का एक-एक काल का या भिन्न-भिन्न स्थानों के समान गुण वाले समंकों का एक-एक काल का कुलंक (Set) बना लिया जाता है और एक कुलंक (Set) के दण्ड-चित्रों को आपस में सटाकर बना दिया जाता है। और थोड़ा-सा रिक्त स्थान छोड़कर फिर दूसरे कुलंक के दण्ड-चित्रों को आपस में सटा कर बना दिया जाता है। इन दण्डों को भिन्न-भिन्न रंग से रंग दिया जाता है और रंग का ब्योरा दे दिया जाता है, जिससे कौनसा रंग क्या प्रदर्शित करता है ज्ञात हो जाता है।

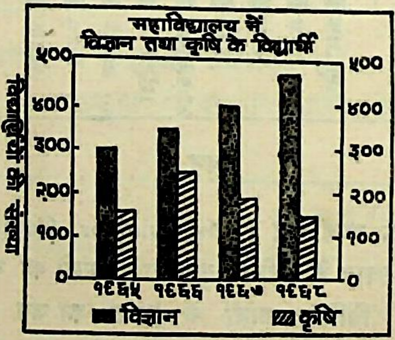
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण—

निम्न सारणी में किसी विद्यालय में विज्ञान तथा कृषि के छात्रों की संख्या दी गई है। इसे संयुक्त दण्ड-चित्र से प्रदर्शित करो—

वर्ष	विज्ञान	कृषि
१९६५	३००	१५५
१९६६	३४०	२५०
१९६७	४००	१९०
१९६८	४८०	१४५



चित्र २

(ग) अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Sub-divided Bar diagram) : यदि कोई सांख्यिकीय सामग्री कई पदों का योग है, तो इसका प्रदर्शन अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र द्वारा बड़े ही सुन्दर ढंग से किया जा सकता है। पहले सम्पूर्ण योग के लिये एक दण्ड बना लेते हैं। फिर विभिन्न पदों के मानों के अनुसार इसको कई भागों में विभाजित कर देते हैं और प्रत्येक भाग को अलग-अलग रंग से रंग देते हैं तथा रंग का ब्योरा अलग से ऊपर या नीचे दे देते हैं ताकि कौनसा रंग किस मद को प्रदर्शित करता है, ज्ञात हो जाय।

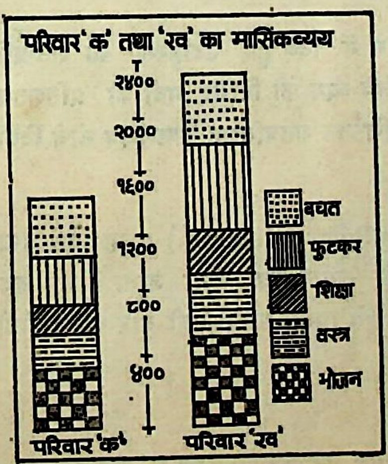
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण—

दिल्ली के दो परिवारों क और ख के मासिक आय और व्यय का ब्योरा निम्न सारणी से प्रदर्शित है तो इन्हें अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों से प्रदर्शित करो।

व्यय की मदें	परिवार क मासिक आय १६०० रु०		परिवार ख मासिक आय २४०० रु०	
	व्यय रु० में	व्यय प्रतिशत	व्यय रु० में	व्यय प्रदर्शित
भोजन	४००	२५%	७२०	३०%
वस्त्र	२४०	१५%	३६०	१५%
शिक्षा	१६०	१०%	२४०	१०%
फुटकर	३२०	२०%	६००	२५%
बचत	४८०	३०%	४८०	२०%



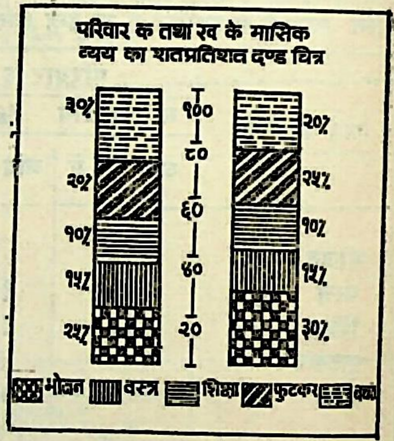
चित्र ३

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(घ) शत-प्रतिशत दण्ड-चित्र या प्रतिशत विभाजित दण्ड-चित्र (Hundred percent Bars or Percentage divided Bars) :

इस रीति में विभिन्न मदों के मूल्य सामग्री के पूरे मूल्य के कौन-कौन से प्रतिशत हैं, निकाल लेते हैं। फिर सामग्री के मूल्य को १०० के बराबर मानकर एक दण्ड बना लेते हैं और इस दण्ड को प्रत्येक मद की प्रतिशतता के अनुसार विभाजित कर देते हैं। विभिन्न भागों को भिन्न-भिन्न रंगों से रंग देते हैं और रंग का ब्योरा अलग से कहीं पर दे देते हैं।



चित्र ४

उपर्युक्त खण्ड ग में दिये हुए उदाहरण को शत-प्रतिशत दण्ड-चित्र द्वारा प्रदर्शित करने के लिये व्यय की विभिन्न मदों की प्रतिशतता ज्ञात कर, सारणी में दे दी गयी है। जिसका शतप्रतिशत दण्ड-चित्र नीचे दिया हुआ है।

ध्रुवीय चित्र (Polar Diagram) : यह एक प्रकार से दण्ड चित्र का ही प्ररूप है। इसका प्रयोग तब किया जाता है जब यह प्रदर्शित करना हो कि कोई घटना दिये हुये समयों पर कितनी बार घटित होती है।

उदाहरण—

किसी नगर के एक चौराहे से दिन के विभिन्न समयों पर जाने वाली कारों की संख्या निम्न है :—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

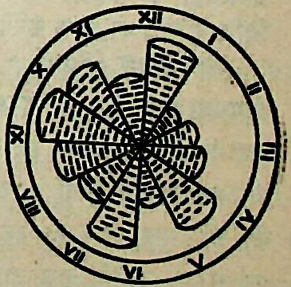
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

तो इसे ध्रुवीय चित्र से प्रदर्शित करो।

समय	कारों की संख्या
१– २ पूर्वाह्न (A. M.)	४००
२– ३	५००
३– ४	६००
४– ५	१०००
५– ६	६००
६– ७	११००
७– ८	८००
८– ९	१०००
९–१०	१२००
१०–११	१०००
११–१२	८००
१२– १ अपराह्न (P. M.)	१२००

ध्रुवीय चित्र

१ सेमी॰ = ४०० कार



चित्र ५

द्विविमितीय चित्र (Two dimensional diagrams) :

द्विबिमा चित्र—में चित्र का क्षेत्र-फल दिये हुये समंकों के समानुपाती होता है।

इसके तीन भेद हैं।

(१) आयत चित्र (Rectangular diargam)

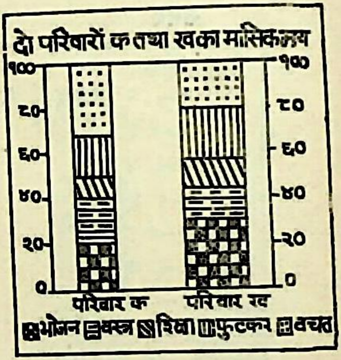
(२) वर्ग चित्र (Sqnare diargam)

(३) वृत्त चित्र (Circular or Pie diagram)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

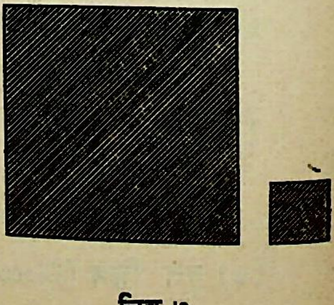
आयत चित्र (Rectangular Diagram) : ऐसे चित्रों में लम्बाई और चौड़ाई दोनों का महत्व है। इस चित्रों में आयत का क्षेत्रफल समंकों के पूरे परिमाण को व्यक्त करता है। और यदि समंकों का परिमाण विभिन्न मदों के परिमाणों का योग है तो इन आंशिक परिमाणों के अनुसार आयत के क्षेत्रफल को अन्तर्विभक्त रीति से या प्रतिशतता (Percentage) के आधार पर विभक्त कर देते हैं। आयत चित्रों का प्रयोग प्राय: ऐसे समंकों के तुलनात्मक अध्ययन में करना चाहियेजिसमें कोई राशि अन्य दो राशियों के गुणनफल से व्यक्त की जा सकती है।



चित्र ६

खण्ड ग में दिये गये उदाहरण में व्यय के ब्यौरे को आयत-चित्र से निम्नलिखित रूप से व्यक्त कर सकते हैं। परिवार अ और ब की सम्पूर्ण आय को १०० मान लिया और इसके लिये इसकी लम्बाई ६ सेन्टीमीटर ले ली तथा इनकी चौड़ाई ८०० : १२०० के अनुपात में १ सेन्टीमीटर और १.५ सेन्टीमीटर लेकर आयतों की रचना कर दी। फिर लम्बाई से विभिन्न मदों की प्रतिशतता के अनुसार भाग काट लिये। प्रत्येक क्षेत्रफल के ये उपविभाग विभिन्न मदों को व्यक्त करेंगे।

वर्ग चित्र (Square diagram) : जब समंकों के आकार में अधिक विषमता होती है, तो इनका प्रदर्शन दण्ड-चित्रों से कठिन हो जाता है। जैसे १० वर्ष पूर्व किसी कृषि फार्म पर गेहूँ की कुल उपज १६ टन थी और इस समय उसकी कुल उपज २५६ टन है। इनका अनुपात १:१६ का है। यदि इन्हें दण्ड-चित्रों से प्रदर्शित किया



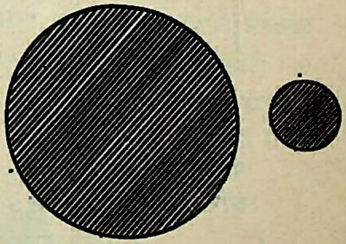
चित्र ७

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जाय तो एक की लम्बाई दूसरे की १६ गुना होगी इसलिये ऐसे समंकों को वर्ग-चित्र से प्रदर्शित करना सुगम है। समंकों का वर्गमूल ४ और १६ है। इनमें १ : ४ का अनुपात है। यदि एक वर्ग की भुजा १ से० मीटर और दूसरे की ४ से० मीटर लेकर वर्ग बना दिये जायें तो ये वर्ग समंकों को सरलता-पूर्वक प्रदर्शित करेंगे। इस प्रकार वर्ग चित्रों में वर्गों की भुजायें समंकों के वर्गमूल के अनुपात में होती हैं।

वृत्त चित्र (Circular diagram or Pie diagram) : इनका भी लाभ वही है जो वर्ग चित्रों का। वर्ग का क्षेत्रफल उसके भुजा के वर्ग के समानुपाती होता है और वृत्त का क्षेत्रफल उसके त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती होता है। इसलिये यदि समंकों के वर्गमूलों का अनुपात १:४ है तो १ से० मीटर और ४ से० मीटर त्रिज्या वाले वृत्तों के क्षेत्रफल समंकों को प्रदर्शित करेंगे। इनके क्षेत्रफलों का अनुपात १:१६ हैं जो समंकों के अनुपात के बराबर हैं।



चित्र ८

कोणिक चित्र (Angular Diagram) : जिस प्रकार समंकों के विभिन्न पदों को प्रदर्शित करने के लिये अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्रों का प्रयोग किया जाता है उसी प्रकार वृत्त के क्षेत्रफल को विभिन्न द्वित्रिज्या (Sectors) में बाँटकर समंकों के विभिन्न मदों को प्रदर्शित कर सकते हैं। इसके लिये समंक के योग को ३६०° के बराबर मान लेते हैं और साधारण गणित से प्रत्येक मद के लिये अंशों की संख्या ज्ञात कर लेते हैं। फिर कोई त्रिज्या लेकर एक वृत्त बना लेते हैं जिसका क्षेत्रफल पूरे समंक को प्रदर्शित करता है। तत्पश्चात् वृत्त के केन्द्र पर विभिन्न मदों के लिये निकाले हुये कोणों के बराबर कोण बनाती हुई त्रिज्यायें खींच देते हैं। इस प्रकार विभिन्न मदों को व्यक्त करने

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

वाले द्वित्रिज्य बन जाते हैं। इनको भिन्न-भिन्न रंगों या चिन्हों से भर दिया जाता है और इनका ब्यौरा दे दिया जाता है ।

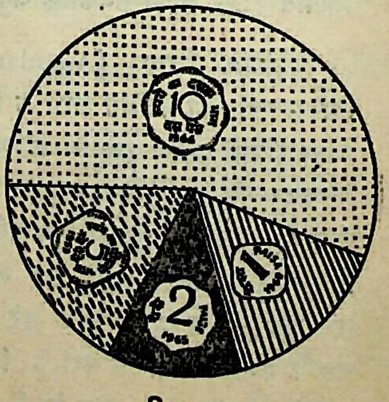
उदाहरण—निम्नलिखित सारणी में १९५६-५७ में भारत ढाले गए सिक्कों का मूल्य दिया गया है। इसे कोणिक चित्र द्वारा प्रदर्शित करो।

सिक्कों की किस्म	मूल्य रुपयों में
१० नये पैसे	१'४२,२२,५००
५ नये पैसे	४४,७९,७५०
२ नये पैसे	२७,५०,८००
१ नया पैसा	३७,४७,७००
योग	२'५२,००,७५०

कुल सिक्कों का मूल्य २,५२,००७५० रु० है, इसे ३६०° से व्यक्त किया जायगा।

इसलिए १'४२,२२,५०० रु० २०३° से व्यक्त होगा
और ४४,७९,७५० रु० ६४° ,, ,, ,,
२७,५०,८०० रु० ४०° ,, ,, ,,
३७,४७,७०० रु० ५३° ,, ,, ,,

अब किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींच कर उसके केन्द्र पर २०३°, ६४°, ४०° और ५३° का कोण बनाती हुई त्रिज्जाएँ खींचा और इन्हें भिन्न चिन्हों से भर दिया। इस चित्र से सिक्कों का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।



चित्र ९

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

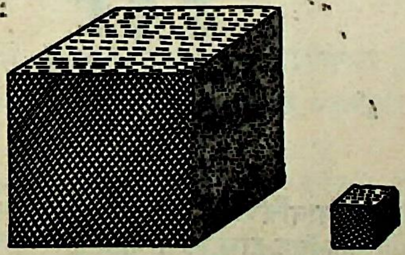
CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

त्रिविमितीय चित्र (Three dimensional Diagram): त्रिविमितीय चित्रों में लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई तीनों का महत्व होता है। ऐसे चित्रों में घन (Cubes), आयतन (Rectang ular Solids), गोला (Sphere), वेलन (Cylinders), आदि का प्रयोग किया जाता है। इनमें समंकों का मान आयतन से प्रदर्शित किया जाता है। इसका प्रयोग उस दशा में किया जाता है जब समंकों के मानों में अत्यधिक भिन्नता हों।

[क] घन (Cubes):

किसी घन का आयतन उसकी भुजा के घन के बराबर होता है। अत: यदि दो समंकों का मान घनों के आयतन से प्रदर्शित होता है तो उनकी भुजायें समंकों के घनमूल के अनुपात में होंगी।

उदाहरणार्थं, यदि दो समंकों का मान ८ तथा ५१२ हैं तो इनको प्रदर्शित करने वाले घन का आयतन १ : ६४ होगा। अत: इन घनों के भुजाओं का अनुपात १ : ४ होगा। अब एक से० मी० और ४ से० मी० के भुजा का घन बना दिया जो समंकों को प्रदर्शित करेंगे।



चित्र १०

इसी प्रकार समंकों का तुलनात्मक चित्र आयतन, गोला, बेलन आदि के प्रयोग से बनाया जा सकता है। आयतन का उपयोग उस दशा में किया जा सकता है जब कोई राशि तीन राशियों के गुणनफल के समानुपाती हो। जैसे किसी कृषि फार्म पर श्रमिकों की मजदूरी, श्रमिकों की संख्या मजदूरी की दर तथा दिनों पर निर्भर करती है। अत: कुल मजदूरी व्यक्त करने के लिये आयतन

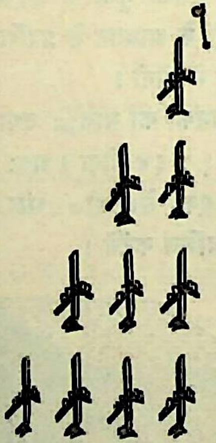
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

को एक भुजा श्रमिकों की संख्या के, दूसरी मजदूरी के दर के तथा तीसरी दिनों की संख्या के समानुपाती होंगी ।

चित्र लेख (Pictograms) :

(अ) सांख्यिकीय सामग्री के तुलनात्मक अध्ययन, विज्ञापन कार्य तथा प्रचार में चित्रलेखों का महत्वपूर्ण स्थान है। इस रीति में समंकों का प्रदर्शन उन वस्तुओं के चित्रों से किया जाता है जिनसे वे समंक सम्बन्धित हैं। जैसे यदि चार देशों की वायु सेना का अनुपात १ : २ : ३ : ४ है तो उन्हें १, २, ३ और ४ वायुयानों के चित्रों से प्रदर्शित कर सकते हैं।



चित्र ११

(ब) सांख्यिकीय मानचित्र (Cartogram or Map Graphs): इसमें समंकों का प्रदर्शन मान-चित्र द्वारा किया जाता है। मानचित्रों में किसी वस्तु की उपज, जनसंख्या और खनिज इत्यादि प्रदर्शित किया जाता है। इस लिये विभिन्न चित्रों और रंगों का प्रयोग किया जाता है।

(स) पिन चित्र (Pin Maps) : इनका प्रयोग उस समय किया जाता है जब समंक थोड़े ही काल में बदल जाते हैं। इसमें बिन्दुओं के स्थान पर पिनें बना देते हैं जिन्हें समंकों के बदलने पर बदल देते हैं।

लेखा चित्रीय प्रदर्शन :

अभी तक सांख्यिकीय समंकों को रेखाचित्रों द्वारा प्रदर्शित करने की विधियाँ बताई गई हैं। समंकों का प्रदर्शन रेखाओं और वक्रों (Curves) द्वारा भी

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

किया जा सकता है। इनको लेखाचित्र कहते हैं। लेखाचित्रों की सहायता से कालान्तर मालाओं(Time Series) तथा आवृत्त वितरणों का प्रदर्शन सफलतापूर्वक किया जा सकता है।

लेखाचित्रों की उपयोगिता :

१. **चित्राकर्षक तथा प्रभावशाली** —लेखाचित्र आकर्षक होते हैं और उनका मस्तिष्क पर प्रभाव शीघ्र ही पड़ जाता है। इससे समंकों का तुलनात्मक अध्ययन रोचक हो जाता है।

२. **समंकों की विशेषतायें समझने में सरलता**—साधारण व्यक्ति के लिये विशाल समंकों का अध्ययन सारणियों से कठिन है। परन्तु यदि उसी सारणी का लेखाचित्र बना दिया जाय तो समंकों का तथ्य सरलता से समझ में आ जाता है।

३. **समंकों का एक साथ दृष्टिगोचर हो जाना**—लेखाचित्र से सम्पूर्ण समंकों का झुकाव एक ही दृष्टि में देखा जा सकता है जो कि सारणियों से कठिन है।

४. समय और श्रम की बचत होती है।

५. **तुलना में सुविधा**—जब कई समंकों का तुलनात्मक अध्ययन करना हो तो उनका लेखाचित्र एक ही वर्गांकित पत्र पर बना देने से यह कार्य सरल हो जाता है।

६. **पूर्वानुमान में सुविधा**—लेखाचित्र से पूर्वानुमान (forecasting) बहुत ही सरल हो जाता है जो अनुसंधानकर्ता के लिये महत्वपूर्ण है।

लेखाचित्रीय प्रदर्शन के दोष :

१. लेखाचित्र से समंकों का वास्तविक मूल्य सरलता से नहीं ज्ञात हो सकता है।

२. लेखाचित्र एक ही साथ बहुत से तथ्यों को प्रदर्शित कर सकते हैं।

३. मापदण्डों के मान में थोड़ा-सा भी परिवर्तन करने से वक्रों के उच्चावचनों में अधिक अन्तर पड़ जाता है जिसका समझना साधारण मस्तिष्क के लिये कठिन है। इससे लेखाचित्रों का स्वार्थी व्यक्तियों द्वारा दुरुपयोग किया जा सकता है।

४. लेखाचित्र का किसी बात की पुष्टि के लिये उद्धरण (Quotation) के रूप में प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

लेखाचित्र की रचना (Drawing of a graph) :

साधारणतः लेखाचित्र वर्गांकित पत्र पर बनाये जाते हैं। लेखाचित्र बनाने का विवेचन अध्याय ८ में किया गया है। पहले वर्गांकित पत्र पर किसी कटान विन्दु को मूल विन्दु मान लिया जाता है। (मूल विन्दु बायें से नीचे कोने में लिया जाता है) फिर उस पर बायें से दायें और नीचे से ऊपर समकोणिक रेखायें ले ली जाती हैं। जिनको क्रमशः य–अक्ष और र–अक्ष कहते हैं। साधारणतया काल, स्थान और परिस्थिति से सम्बन्धित समंकों को य—अक्ष पर और मूल्य, आय, जनसंख्या, उत्पादन इत्यादि से सम्बन्धित समंकों को र—अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं। समंकों का आकार घटाने के लिये पैमाना मान लेना चाहिये। ऐसा करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि लेखाचित्र वर्गांकित पत्र पर आ जाय, परन्तु यह न बहुत छोटा ही हो जाय न बहुत बड़ा ही। पैमाने का उल्लेख कर देना चाहिये और ऊपर लेखाचित्र का शीर्षक दे देना चाहिये।

लेखाचित्र के भेद :

(१) आवृत्ति वितरण के लेखाचित्र (Graph of frequency distribution)

(२) कालिक लेखाचित्र (Graph of Time Series or Histogram)

आवृत्ति वितरण के लेखाचित्र—

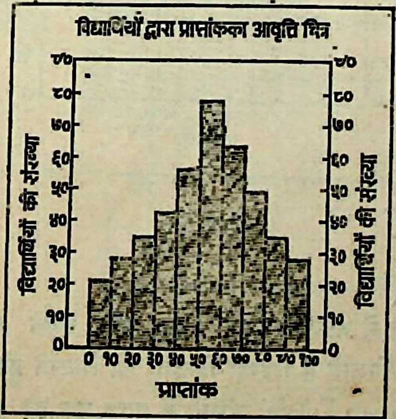
(क) आवृत्ति चित्र (Histogram): इसमें सम्भागान्तरों को य-अक्ष पर और आवृत्ति को र-अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं। ऐसा करने से प्रत्येक सम्भागान्तर तथा उसकी संगत आवृत्ति से आयत बनता है। जिसकी चौड़ाई सम्भागान्तर विस्तार और लम्बाई आवृत्त के समानुपाती होती है। चूंकि सम्भागान्तर बराबर होते हैं इसलिये आयतों का क्षेत्रफल आवृत्ति के समानुपाती होता है। इस प्रकार से प्राप्त आयतों के समूह को (Histogram) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण : किसी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्तांक निम्न आवृत्ति सारणी से व्यक्त किये गये हैं तो इनको आवृत्ति चित्र से प्रदर्शित करो।

प्राप्तांक सम्भागान्तर	विद्यार्थियों की संख्या आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
०—१०	२०	२०
१०—२०	२५	४५
२०—३०	४५	८०
३०—४०	६५	१२५
४०—५०	८०	१८५
५०—६०	८०	२६५
६०—७०	७०	३३५
७०—८०	५५	३९०
८०—९०	४०	४३०
९०—१००	३०	४६०



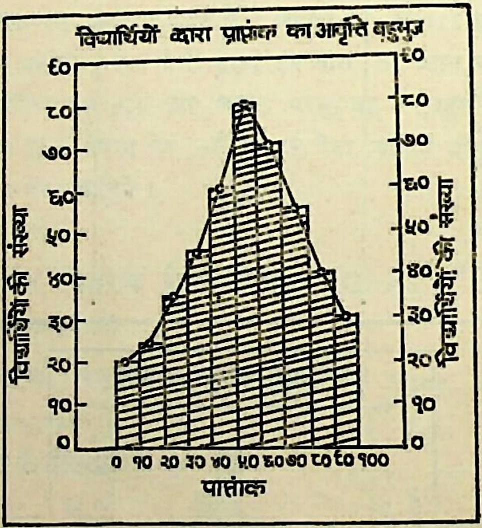
१२ चित्र १२

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) :

सम्भागान्तर के उच्च और निम्न सीमा का मध्यमान चर राशि का मान माना जाता है। मध्य मानों को भुज और संगत आवृत्तियों को कोटि मान कर बिन्दुओं को अंकित करके स्केल से मिलाने पर जो चित्र बनता है उसे बहुभुज चित्र कहते हैं। इसे बनाने के लिये पहले आवृत्ति चित्र बना लेते हैं। फिर बने हुये आयतों के ऊपरी सिरे के मध्य बिन्दुओं को मिला देते हैं जैसा कि चित्र से स्पष्ट है।



चित्र १३

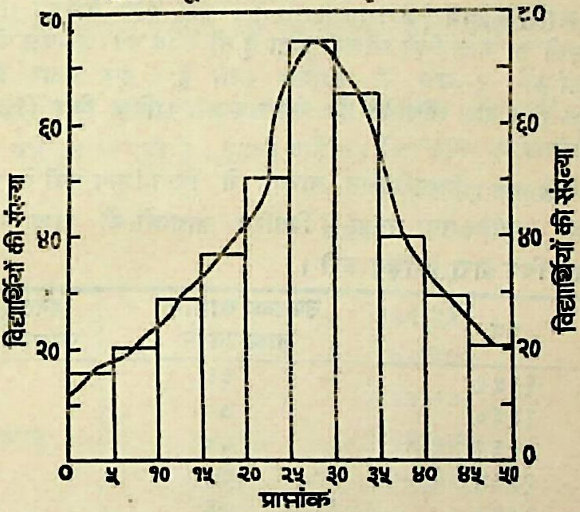
(ग) आवृत्तिवक्र (Frequency Curve) :

आवृत्ति बहुभुज में मध्य विन्दुओं को भुज और संगत आवृत्ति को कोटि लेकर अंकित करके मिलाते हैं। इन्हीं विन्दुओं को मिलाते हुये मुक्त हस्त वक्र (Free hand smooth curve) खींचने से प्राप्त वक्र को आवृत्ति वक्र कहते हैं। जैसा कि निम्न चित्र से स्पष्ट है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

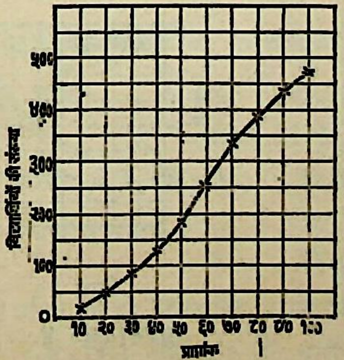
विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक का आवृत्ति वक्र



चित्र १४

(घ) संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency Curve) :

सम्भागान्तर की उच्च सीमा को भुज और संगत संचयी आवृत्ति को कोटि लेकर विन्दुओं का आलेखन करके स्वतन्त्र हाथ से मिलाने से जो वक्र प्राप्त होता है उसे संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency Curve) कहते हैं



चित्र १५

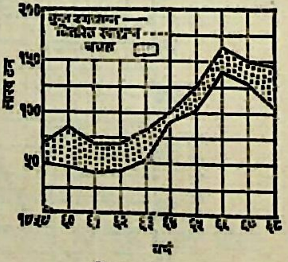
Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

कालिक चित्र (Historigram) : जब काल माला (time series) के समंकों का लेखा चित्र खींचना होता है तो समय को य--अक्ष पर तथा संगत आंकड़ों को र--अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार प्राप्त बिन्दुओं से मुक्त हस्त वक्र खींच देते हैं। ऐसे वक्र को कालिक चित्र (Historigram) कहते हैं।

उदाहरण : निम्नलिखित सारणी में भिन्न-भिन्न वर्षों में भारत सरकार के पास उपलब्ध तथा जनता में वितरित खाद्यान्नों की मात्रा दी गई है। तो कालिक चित्र द्वारा प्रदर्शित करो।

वर्ष	उपलब्ध खाद्यान्न लाख टन में	जनता में वितरित खाद्यान्न लाख टन में
१९५९	६६	५२
१९६०	७८	४९
१९६१	६८	४०
१९६२	६७	४४
१९६३	७६	५२
१९६४	९९	८७
१९६५	१·५	१०१
१९६६	१६५	१४१
१९६७	१५३	१३२
१९६८	१४७	११२



चित्र १६

प्रश्नावली ४

१. लेखाचित्रीय तथा रेखाचित्रीय प्रदर्शनों में क्या अन्तर है तथा उसमें किस-

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

किस प्रकार की सामग्री प्रदर्शित की जा सकती हैं ? उदाहरण सहित समझाओ ।

२. निम्न सारणी में भारत के कुछ प्रान्तों की जनसंख्या १९६१ की जन-गणना के अनुसार दी गयी है । इसको यथोचित चित्र द्वारा प्रदर्शित करो ।

(साधारण दण्ड चित्र से)

प्रान्त	जनसंख्या (लाख में)
आसाम	११८·६०
उत्तर प्रदेश	७३१·५३
उड़ीसा	१७५·६६
महाराष्ट्र	३९५·०४
जम्मू काश्मीर	३५·८४
गुजरात	२०६·२१
विहार	४६४·५७
आन्ध्र प्रदेश	३५९·७८
मध्य प्रदेश	३२३·९४

३. निम्नांकित आंकड़ों को उचित रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करो ? (संयुक्त दण्ड चित्र से)

किसी देश में कोयला, पेट्रोलियम तथा चीनी का उत्पादन

मद	१९५०	१९५१	१९५२	१९५३
		(हजार टन में)		
कोयला	२०	२५.२	२८.५	३०
पेट्रोलियम	१०.५	१८.७	२०	२२
चीनी	८	१०.५	१५.६	२०

४. निम्नांकित सारणी में भारत की दो पंचवर्षीय योजनाओं में विभिन्न विभागों पर सम्भावित व्यय दिया गया है । इसे समुचित चित्र द्वारा प्रदर्शित करो ? (अन्तर विभक्त दण्ड चित्र से)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

व्यय की मद	प्रथम योजना	द्वितीय योजना
	(करोड़ रुपयों में)	
(अ) कृषि तथा सामुदायिक विकास	३५७	५६८
(ब) सिंचाई तथा बिजली	६६१	९१३
(स) खान तथा उद्योग	१७	८९०
(द) परिवहन तथा संचार	५५७	१३८५
(य) समाज	५३३	९४५
(फ) अन्य	६९	९९
योग	२,३५६	४,८००

५. प्रश्न (४) में दिये हुए आंकड़ों को शत-प्रतिशत दण्ड चित्र द्वारा प्रदर्शित करो।

६. दो परिवारों की मासिक आय-व्यय का ब्यौरा निम्न सारणी में दिया गया है। इनको आयत चित्र द्वारा प्रदर्शित करो।

व्यय की मद	परिवार अ (आय ६०० रु०)	परिवार ब (आय ९०० रु०)
भोजन	२५०	४००
वस्त्र	७५	१५०
मकान का किराया	६५	१२०
शिक्षा	५०	१००
अन्य (मय बचत के)	१६०	१३०
योग	६००	९००

७. प्रश्न (६) में दिये गये आंकड़ों को कोणिक चित्र द्वारा प्रदर्शित करो।

८. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखो।

(अ) एक विमितीय चित्र
(ब) संयुक्त दण्ड चित्र
(स) शत प्रतिशत दण्ड चित्र
(द) आवृत्ति चित्र
(य) आवृत्ति बहुभुज
(फ) कालिक चित्र

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

९. आवृत्ति चित्र और कालिक चित्र में क्या अन्तर है ? नीचे दी हुई सारणी में लेखाचित्र खींचो, जिनमें तीनों प्रकार के गेहुँओं की वृद्धि दिखायी पड़े। इन सारणियों में तीन जाति के गेहूँ के पौधों की ऊँचाई उनके जीवन चक्र के विविध पदों पर दी गयी है। जो लेखाचित्र मिले उसकी व्याख्या करो तथा तीनों जातियों के बढ़ने की दरों की तुलना करो।

जाति \ आयु दिनों में	१५	३०	४५	६०	७५	९०	१०५	१२०
पी० डी० ५९१	३·०	३·५	७·०	१९·०	२७·०	५१·०	९८	१०६५
सी० १३	२·५	४·०	१००	३१·०	४४·०	८२·०	१११·५	११९·५
स्थानीय	३·०	४·५	१२·५	२२·०	३७·५	७७·५	१०९·०	११२·५

१०. निम्नांकित आवृत्ति वितरण को आवृत्ति चित्र द्वारा प्रदर्शित करो।

मासिक आय (रु० में)	परिवारों की संख्या
२५	४०
७५	८०
१२५	१२५
१७५	७०
२२५	४५
२७५	४०
३२५	३५
३७५	३०
४२५	२५

११. प्रश्न १० में दिये हुए आँकड़ों से संचयी आवृत्ति चित्र खींचो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

5 केन्द्रीय प्रवृति की मापें
(MEASURES OF CENTRAL TENDENCY)

विगत अध्यायों में सांख्यिकीय समंकों के संकलन, वर्गीकरण, सारणीकरण और इनके लेखाचित्रीय और लेखाचित्रीय ,प्रदर्शन की विभिन्न विधियों का वर्णन किया गया है। इन सब विधियों का उद्देश्य समंकों का तुलनात्मक अध्ययन है। संकलित और वर्गीकृत समंकों का लेखाचित्रीय और रेखाचित्रीय अध्ययन आँख के माध्यम से होता है। इसलिये निकाले गये निष्कर्ष पूर्णरूपेण विश्वसनीय नहीं होते हैं। यदि किसी प्रकार से विभिन्न समंक मालाओं के प्रतिनिधि अंक ज्ञात हो जायें तो इन अंकों की सहायता से समंकों का तुलनात्मक अध्ययन सबसे सरल होगा। वे सभी परिमाण जिनके द्वारा समक मात्राओं के प्रतिनिधि अंक व्यक्त किये जाते हैं, केन्द्रीय प्रवृति के मापें (Measures of Central Tendency) कहलाते हैं जिनका वर्णन आगे किया जा रहा है।

माध्य (Averages) से प्रायः समानान्तर माध्य समझा जाता है जो समंक के सभी पदों के योग में पद की संख्या से भाग देने से प्राप्त होता है। परन्तु सांख्यिकी विषय के अन्तर्गत माध्य कई प्रकार के होते हैं जो समंकों के विभिन्न लक्षणों का प्रतिनिधित्व करते हैं। माध्य कोई भी हो इसके निकालने का, तात्पर्य, समंक माला से एक ऐसा अंक निकालना है, जो उसके किसी विशेष लक्षण का प्रतिनिधित्व कर सके।

अतः हम यह कह सकते हैं कि माध्य वह अंक है जिसके चारों तरफ समंक माला के अन्य अंक एक सीमा के अन्दर परिणमन करते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सन्तोषजनक माध्य के गुण :

१. इसकी परिभाषा स्पष्ट और सुदृढ़ होनी चाहिये।

२. माध्य समंक माला के सभी पदों पर आधारित होनी चाहिये।

३. माध्य का सामान्य प्रभाव शीघ्रातिशीघ्र मस्तिष्क पर पड़ जाना चाहिये।

४. माध्य की गणना सरल होनी चाहिये।

५. माध्य पर निदर्शन के उच्चावचनों (Fluctuations ef Sampling) का प्रभाव कम से कम पड़ना चाहिये। यदि उचित माध्य प्रयोग में लाया गया होगा तो एक ही समग्र (Universe) से जितने न्यादर्श (Sample) लिये गये होंगे उनके माध्यों में समानता होगी।

६. माध्य ऐसा होना चाहिये कि इसकी गणना बीज गणित के नियमों से सुगमता से हो सके।

७. माध्य से उसका ध्येय स्पष्ट रूप से व्यंजित हो जाना चाहिये।

सांख्यिकीय माध्य के भेद (Types of Statistical averages) :

१. समान्तर माध्य या मध्यक (Arithmetic average or mean)

२. माध्यिका (Median)

३. भूयिष्ठक या बहुलक (Mode)

४. भारित समान्तर माध्य या मध्यक (Weighted arithmetic average or mean)

५. गुणोत्तर माध्य (Geometric mean)

६. हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

समान्तर माध्य या मध्यक—समान्तर माध्य या मध्यक किसी सांख्यिकीय माला के पदों के योग में पदों की सख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

यदि मध्यक=म

और न पदों के मान क्रम से $य_1, य_2, य_3, \cdots\cdots य_न$ है,

$$\text{तो } म=\frac{य_1+य_2+य_3+\cdots\cdots+य_न}{न} \text{ है।}$$

$$\therefore \quad म=\frac{\Sigma य}{न}$$

$$\left[M=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}{N}\right]$$

$$\text{या} \quad M=\frac{\Sigma X}{N}$$

उदाहरण. दस लड़कों की ऊँचाइयाँ क्रमशः ५५, ५६, ५७, ५७, ५७·५, ५८, ५९, ५९·५, ६०, ६०·५, और ६१ इंच हैं तो मध्यक ज्ञात करो ?

न=१०

Σ य=५५+५६+५७+५७·५+५८+५९+५९·५+६०+६०·५+६१

=५८३·५

$$\therefore \quad म=\frac{५८३·५}{१०}=५८·३५ \text{ इंच}$$

आवृति वितरण से मध्यक की गणना (Computation from frequency distribution) :

यदि चर राशि के विभिन्न पदों के मान क्रमशः

$य_1, य_2, य_3, \cdots\cdots, य_न$ हैं,

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

और उनकी आवृत्तियाँ क्रमशः

$अ_1, अ_2, अ_3, \cdots\cdots, अ_न$ हैं।

तो

$$म = \frac{अ_1 य_1 + अ_2 य_2 + अ_3 य_3 + \cdots\cdots + अ_न य_न}{अ_1 + अ_2 + अ_3 + \cdots\cdots + अ_न}$$

$$\therefore \quad म = \frac{\Sigma अ य}{न}$$

$$\left[M = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots\cdots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots\cdots f_k} \right]$$

$$= \frac{\Sigma f x}{N}$$

उदाहरण :

(क) खंडित माला से—

निम्न आवृत्ति सारणी से मध्यक की गणना करो।

पचास छात्रों का मासिक व्यय—

व्यय रुपये में	छात्रों की संख्या
४०	३
४२	२
४५	४
४८	७
५०	१५
५१	१०
५२	५
५५	४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

हम इस प्रश्न को निम्नांकित सारणी की सहायता से न और अ य ज्ञात करके हल करेंगे।

व्यय रुपये में (य) (x)	आवृत्ति (अ) (f)	अ य (fx)
४०	३	१२०
४२	२	८४
४५	४	१८०
४८	७	३३६
५०	१५	७५०
५१	१०	५१०
५२	५	२[illegible]०
५५	४	२२०
योग	(N) न=५०	Σ अ य Σ f x=२४६०

$$म=\frac{\Sigma\, अ\, य}{न}\quad\left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)$$

$$=\frac{२४६०}{५०}=४९\cdot२ \text{ रुपया}$$

लघुरीति—(कल्पित माध्य चुनकर)

(Short cut method by choosing assumed or arbitrary mean)

जब आवृत्ति अ और चर राशि य बड़ी-बड़ी संख्याओं से व्यक्त होते हैं तो अ य निकालने में कठिनाई होती है और अधिक समय भी लगता है। ऐसी दशा में लघुरीति से प्रश्नों को हल करना चाहिए। इस रीति में कोई कल्पित माध्य (assumed mean) चुन लेते हैं जो दी हुई श्रेणी का कोई

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

भी पद हो सकता है। परन्तु महत्तम आवृत्ति वाले पद को कल्पित माध्य लेने से गणना और भी सरल हो जाती है। इस रीति में जो सूत्र प्रयोग किया जाता है वह निम्नलिखित है।

$$म = क + \frac{\Sigma \text{ अ व}}{न} \quad \left(M = A + \frac{\Sigma fd}{N} \right)$$

जब कि क(A) = कल्पित माध्य

व = (य − क) [d = (x − A)] [श्रे० के प्रत्येक पद का कल्पित माध्य से विचलन (deviation) है]

न = (N) पदों की कुल संख्या अर्थात् आवृत्तियों का योग

टिप्पणी : Σ अ व का मान उचित चिह्न के साथ (+) या (—) जैसा हो, सूत्र में रखना चाहिये। यदि महत्तम आवृत्ति का पद श्रेणी के किसी सिरे पर है तो उसे कल्पित माध्य नहीं चुनना चाहिए। ऐसी दशा में बीच का कोई पद कल्पित माध्य लेना चाहिए।

पिछले उदाहरण का मध्यक लघु रीति से निकालना—

व्यय रु० में (य) x	आवृत्ति (अ) f	क=५० विचलन d=(य—क)	अ व fd
४०	३	—१०	—३०
४२	२	— ८	—१६
४५	४	— ५	—२०
४८	७	— २	—१४
५० (क)	१५	०	०
५१	१०	१	१०
५२	५	२	१०
५५	४	५	२०
योग	५०		—४०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$म = क + \frac{\Sigma अ व}{न} \quad \left(A + \frac{\Sigma fd}{N} \right)$$

$$= ५० - \frac{४०}{५०}$$

$$= ५० - '८$$

$$= ४९'२$$

संततमाला (Continuous series) से मध्यक की गणना : सततमाला में सम्भान्तारों (Class interval) की आवृत्तियाँ दी रहती हैं। चर राशि य का मान सम्भागान्तर के उच्च और निम्न सीमा का मध्यमान (Mid value) होता है। गणना उपर्युक्त रीतियों से ही की जाती है।

(क) साधारण रीति :

निम्नांकित आवृत्ति सारणी से मध्यक की गणना करो।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
० — १०	१५
१० — २०	२०
२० — ३०	२५
३० — ४०	२४
४० — ५०	१२
५० — ६०	७०
६० — ७०	५०
७० — ८०	२०
८० — ९०	१०
९० — १००	४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

सम्भागान्तर	मध्यमान (य) X	(अ) f	अ य fX
० – १०	५	१५	७५
१० – २०	१५	२०	३००
२० – ३०	२५	२५	६२५
३० – ४०	३५	२४	८४०
४० – ५०	४५	१२	५४०
५० – ६०	५५	७०	३८५०
६० – ७०	६५	५०	३२५०
७० – ८०	७५	२०	१५००
८० – ९०	८५	१०	८५०
९० – १००	९५	४	३८०
योग		२५०	१२२१०

सूत्र, $म = \Sigma \frac{अय}{न}$ से $\left(M = \frac{\Sigma fX}{N}\right)$

$$म = \frac{१२२१०}{२५०} = ४८·८४$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) लघु रीति—(कल्पित माध्य से)

सम्भागान्तर	मध्यमान (य) X	अ f	क (A)=५५ ब=(य−क) (d=X−A)	अ ब f d
०— १०	५	१५	−५०	—७५०
१०— २०	१५	२०	−४०	—८००
२०— ३०	२५	२५	−३०	—७५०
३०— ४०	३५	२४	−२०	—४८०
४०— ५०	४५	१२	−१०	—१२०
५०— ६०	५५ (क)	७०	०	०
६०— ७०	६५	५०	१०	५००
७०— ८०	७५	२०	२०	४००
८०— ९०	८५	१०	३०	३००
९०—१००	९५	४	४०	१६०
योग		२५०		−१५४०

$$म = क + \frac{\Sigma अब}{न} \left(M = A + \frac{\Sigma fd}{N} \right)$$

$$= ५५ - \frac{१५४०}{२५०}$$

$$= ५५ - ६.१६$$

$$= ४८.८४$$

(ग) तीसरी रीति

यह रीति उपर्युक्त रीति से अधिक सरल है। बहुत ही थोड़े समय में इससे गणना की जा सकती है। इसे पद विचलन रीति (Step deviation method) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उपर्युक्त सारणी देखो। सम्भागान्तर विस्तार १० है, और विचलन (ब) इसका −५, −४, −३, −२, −१, ०, १, २, ३, ४ गुना है। ये सभी संख्यायें $\frac{ब}{स}\left(\frac{d}{c}\right)$ की मान हैं।

इसलिये खण्ड क के सूत्र का रूप निम्नलिखित होगा

$$म = क + \frac{१}{न}\left(\Sigma \frac{अ ब}{स}\right) \times स \left[M = A + \frac{1}{N}\left(\Sigma \frac{fd}{c}\right) \times c\right]$$

(जब कि स (c)=सम्भागान्तर विस्तार)

सम्भागान्तर	मध्यमान (य) x	अ f	क=५५ ब=(य−क) (d=X−A)	$\frac{ब}{स}\left(\frac{d}{c}\right)$	$\frac{अ ब}{स}\left(\frac{fd}{c}\right)$
०− १०	५	१५	−५०	−५	−७५
१०— २०	१५	२०	−४०	−४	−८०
२०− ३०	२५	२५	−३०	−३	−७५
३०− ४०	३५	२४	−२०	−२	−४८
४०− ५०	४५	१२	−१०	−१	−१२
५०− ६०	५५ (क)	७०	०	०	०
६०− ७०	६५	५०	१०	१	५०
७०— ८०	७५	२०	२०	२	४०
८०— ९०	८५	१०	३०	३	३०
९०—१००	९५	४	४०	४	१६
योग		२५०			−१५४

$$म = क + \frac{१}{न}\left(\Sigma \frac{अ ब}{स}\right) \times स \left[M = A + \frac{1}{N}\left(\Sigma \frac{fd}{c}\right) c\right]$$

$$= ५५ - \frac{१५४}{२५०} \times १०$$

$$= ५५ - ६{\cdot}१६$$

$$= ४८{\cdot}८४$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मध्यक के लाभ :

१. इसका अर्थ साधारण व्यक्ति भी समझ लेता है। इसलिये प्रयोग करते समय परिभाषा देने की आवश्यकता नहीं होती।

२. इसकी गणना सरल है।

३, इसका प्रयोग बीजगणित में किया जा सकता है। इसलिये उच्चतर सांख्यिकी अध्ययन में अति महत्वपूर्ण है।

४. इसमें समंक माला के सभी पदों का समान महत्त्व है।

५. इसे ज्ञात करने के लिये पदों को क्रम बद्ध करना कोई आवश्यक नहीं है।

६. यदिकेवल समंक माला का कुल मूल्य और उसके पदों की कुल संख्या दी हो तो भिन्न-भिन्न पदों के मूल्यों के अभाव में भी इसकी गणना कर सकते हैं। जैसे—यदि १० मनुष्यों की आय ५०० रु० है तो प्रति मनुष्य औसत आय ५० रु० रुपया हुई। यहाँ पर सभी मनुष्यों की अलग-अलग आय ज्ञात नहीं है।

७. यदि मध्यक और पदों की संख्या दी हुई हो तो पदों का कुल मूल्य ज्ञात हो सकता है।

८. तुलनात्मक अध्ययन के लिये उपयुक्त है, क्योंकि अधिक विश्वसनीय है।

९. यह अमूर्त गणितीय प्रकृति का नहीं है।

१०. इस पर न्यादर्श के उच्चावचनों का प्रभाव कम पड़ता है।

मध्यक के दोष :

१. इसमें प्रत्येक पद का महत्व समान है। इस कारण से कभी-कभी छोटे मूल्यों की अपेक्षा बड़े मूल्यों का महत्त्व अधिक हो जाता है।

जैसे श्रमिकों की आय में करोड़पति, मिल-मालिक की आय मिला देने से मध्यक आय पर अत्यधिक प्रभाव पड़ जायेगा।

२. प्रायः मध्यक समंक माला के किसी पद का मूल्य नहीं होता।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जैसे—३, ४, ५, ६ का मध्यक ४·५ है जो समंक माला में कोई भी मूल्य नहीं है। किसी मुर्गी द्वारा प्रतिदिन दिये गये अण्डों का मध्यक ३·५ आ सकता है, जो कि असम्भव है।

३. गुणात्मक समंकों के अध्ययन में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता।

४. समंक माला के केवल आकार को देख कर इसे ज्ञात नहीं किया जा सकता।

५. समंक माला के किसी मूल्य के अज्ञात होने पर इसकी गणना नहीं हो सकती है।

६. कई समंक मालाओं का मध्यक समान आ सकता है। परन्तु उनकी बनावट में अन्तर हो सकता है। इसलिये इससे भ्रामक सूचनायें प्राप्त हो सकती हैं।

७. अनुपात और दर आदि का अध्ययन इससे नहीं किया जा सकता है।

मध्यक का उपयोग—इसका उपयोग व्यापार, वाणिज्य और सामाजिक और आर्थिक अध्ययन में किया जाता है। जैसे खर्च, ऊँचाई, उपज, उत्पादन इत्यादि में माध्य निकालने में इसी का प्रयोग किया जाता है।

मध्यिका (Median) :

किसी समंक माला के पदों को जब आरोही या अवरोही क्रम से विन्यस्त कर दिया जाता है तो मध्य पद के मूल्य को मध्यिका (Median) कहते हैं। अर्थात् मध्यिका उस पद का मूल्य है जिसके ऊपर और नीचे पदों की संख्या बराबर होती है। यदि पदों की संख्या 'न' (N) है तो मध्यिका $\left(\frac{न+१}{२}\right)$ $\left(\frac{N+1}{२}\right)$वें पद का मूल्य होती है। $\left(\frac{न+१}{२}\right)$ को माध्यिका संख्या (Median number) कहते हैं।

आम सामग्री अथवा साधारण माला से गणना (Computation from the row data or Individual series) :

उदाहरण १—

(जब पदों की संख्या विषम है)—निम्नांकित संख्याओं की मध्यिका निकालो।

५, १०, ७, १५, ३०, २२, २०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

आरोही क्रम से विन्यस्त करने पर संख्याओं से एक साधारण श्रेणी ५, ७, १०, १५, २०, २२, ३० बन जाती है।

इसमें पदों की कुल संख्या ७ है, इसलिये $\left(\frac{७+१}{२}\right)$ अर्थात् चौथे पद का मूल्य मध्यका होगा। श्रेणी के चौथे पद का मूल्य १५ है। यही अभीष्ट मध्यका है।

उदाहरण २.

संख्याओं ४, २, ३, ७, ५, ९, ११, १३ की मध्यका ज्ञात करो।

संख्याओं को आरोही क्रम में विन्यस्त करने पर साधारण श्रेणी २, ३, ४, ५, ७, ९, ११, १३ बन जाती है। इसमें पदों की कुल संख्या ८ है। इसी लिये मध्यका $\left(\frac{८+१}{२}=४\cdot५\right)$ वें पद का मूल्य होगा। परन्तु ४·५ वाँ पद कोई अर्थ नहीं रखता। क्योंकि पद की संख्या एक पूर्ण राशि होगी। चौथा, पन्द्रहवाँ पद का अर्थ साफ है। परन्तु साढ़े चौदहवाँ, पौने पन्द्रहवाँ पद कहना कोई अर्थ नहीं रखता। उपर्युक्त उदाहरण में चौथे और पाँचवें पदों के मूल्यों का मध्यमान माध्यिका होगा।

इसलिये दी हुई श्रेणी की माध्यिका $=\frac{५+७}{२}=६$ है।

टिप्पणी—इसलिये उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि

(क) मध्यिका $\left(\frac{न+१}{२}\right)$ वें पद का मूल्य होगा जब न विषम है।

(ख) मध्यिका $\frac{न}{२}$ वें और $\left(\frac{न}{२}+१\right)$ वें पदों के मूल्यों मध्यमान होगा जब न सम संख्या है।

आवृत्ति वितरण से गणना (Computation from the frequency distribution) :

(क) खण्डित माला (Discrete Series) :

इस श्रेणी से मध्यिका निकालने के लिये सर्व प्रथम चर राशि की संचयी आवृत्ति निकालते हैं। संचयी आवृत्ति निकालने में चर राशि के प्रथम मूल्य

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

की सीध में उसकी आवृत्ति, द्वितीय मूल्य की सीध में दोनों आवृत्तियों का योग, तृतीय मूल्य की सीध में तीनों का योग लिखते हैं और यही क्रम जारी रखते हैं। इस प्रकार चर राशि के अन्तिम मूल्य की संचयी आवृत्ति विभिन्न आवृत्तियों के योग के बराबर होती है जो श्रेणी में पदों की संख्या के बराबर है। अब मध्यिका ज्ञात करने के लिये $\left(\frac{न + १}{२}\right)$ वीं संख्या संचयी आवृत्ति के स्तम्भ में देखते हैं और इसकी संगत चर राशि का मूल्य ज्ञात कर लेते हैं। यही दी हुई श्रेणी की अभीष्ट मध्यिका होगी। निम्नलिखित उदाहरण से पूरी विधि का स्पष्टीकरण हो जायेगा।

उदाहरण :

किसी कारखाने में काम करने वाले मजदूरों की प्रतिदिन की मजदूरी और उनकी संख्या व्यक्त की गयी है तो मध्यिका की गणना करो।

मजदूरी पैसे में	५०	६०	७५	१००	१२५	१५०	१७५	२००	२५०	३००
मजदूरों की संख्या	१०	१२	५०	७०	८०	६०	४८	४०	१८	१२

हल करने के लिये निम्नांकित सारणी बनायी जायगी।

मजदूरी पैसों में (चर राशि का मान)	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
५०	१०	१०
६०	१२	२२
७५	५०	७२
१००	७०	१४२
१२५	८०	२२२
१५०	६०	२८२
१७५	४८	३३०
२००	४०	३७०
२५०	१८	३८८
३००	१२	४००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\text{मध्यिका संख्या} = \left(\frac{\text{न}+१}{२}\right)$$

$$= \frac{४००+१}{२} = \frac{४०१}{२}$$

$$= २००\cdot५$$

संचयी आवृत्ति के स्तम्भ को देखने से ज्ञात होता है कि संख्या २००·५ संचयी आवृत्ति २२२ के अन्तर्गत है जिसके संगत चर राशि का मूल्य १०५ है। यही श्रेणी की अभीष्ट मध्यिका है।

(ख) संतत माला (Continuous series) : जब समंक माला सम्भागान्तरों में दी हुई होती है तो मध्यिका की गणना निम्नलिखित सूत्र से की जाती है।

सूत्र

$$\text{म}_\text{क} = \text{ल}_१ + \left[\frac{\frac{\text{न}}{२} - \text{फ}}{\text{श्र}}\right] \times \text{स} \quad \left[Md = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f}\right)c\right]$$

जबकि

$\text{म}_\text{क}$ (Md) = मध्यिका

$\text{ल}_१$ (L_1) = मध्यिका सम्भागान्तर (Median Class) की निम्न सीमा (Lower limit)

न (N) = सभी आवृत्तियों का योग अर्थात् श्रेणी में पदों की कुल संख्या।

फ (F) = मध्यिका सम्भाग के पूर्व सम्भाग की संचयी आवृत्ति

श्र (f) = मध्यिका सम्भाग की आवृत्ति

स (c) = सम्भागान्तर विस्तार

Ganesh Varni-Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

टिप्पणी १. यदि 'ल'$_२$ (L_2)=मध्यिका सम्भाग की उच्च सीमा तो,

$$स=(ल_२-ल_१)$$

टिप्पणी २. बहुत सी पुस्तकों में मध्यिका संख्या $\frac{न+१}{२}$ संतत मालाओं में भी लिया गया है जिससे मध्यिका का सूत्र

$$म_क=ल_१+\left[\frac{\frac{न+१}{२}-फ}{श्र}\right]\times स$$ दिया गया है, परन्तु यूल्स, मिल्स,

$$Md=L_1+\left(\frac{\frac{N+1}{2}-F}{f}\right)c$$

नीस वेंगर, बाग, मौरनी और क्राक्स्टन आदि बड़े-बड़े आधुनिक सांख्यिकों ने संततमाला में मध्यिका संख्या $\frac{न}{२}$ लिया है जब कि खण्डित माला में मध्यिका संख्या $\frac{न+१}{०}\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ही है। विद्यार्थी दोनों सूत्रों में किसी एक से गणना कर सकते हैं।

उदाहरण : निम्न सारणी में ४० विद्यार्थियों के प्राप्तांक दिये गये तो मध्यिका ज्ञात करो।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
०— ५	२
५—१०	४
१०—१५	५
१५—२०	१५
२०—२५	३०
२५—३०	४०
३०—३५	१२
३५—४०	८
४०—४५	३
४५—५०	१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्न हल करने में निम्नांकित सारणी बनाई जायगी

सम्भागान्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
०— ५	२	२
५—१०	४	६
१०—१५	५	११
१५—२०	१५	२६
२०—२५	३०	५६ (फ)
($ल_1$) २५—३०	४० (अ)	९६
३०—३५	१२	१०८
३५—४०	८	१०६
४०—४५	३	११९
४५—५०	१	१२०

सूत्र—

$$म_क = ल_1 + \left[\frac{\frac{न}{२} - फ}{अ}\right] \times स$$

$$मध्यिका\ संख्या = \frac{न}{२} = \frac{१२०}{२} = ६०$$

संचयी आवृत्ति के स्तम्भ को देखने से ज्ञात होता है कि मध्यिका संख्या संचयी आवृत्ति ९६ के अन्तर्गत है। इसका संगती सम्भागान्तर २५-३० है जिसमें मध्यिका स्थित है।

इसलिये, $ल_1 = २५$

और, $अ = ४०$

$स = ५$

$फ = ५६$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसलिए, $$म_{क} = २५ + \left[\frac{६० - ५६}{४०}\right] \times ५$$

$$= २५ + \frac{४}{४०} \times ५$$

$$= २५ + \cdot५$$

$$= २५\cdot५$$

उपर्युक्त उदाहरण के प्रश्न के सम्भागान्तरों को अवरोही क्रम में विन्यस्त करके हल करना।

सम्भागान्तर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
४५—५०	१	१
४०—४५	३	४
३५—४०	८	१२
३०—३५	१२	२४ (फ)
२५—३० ($ल_२$)	४० (अ)	६४
२०—२५	३०	९४
१५—२०	१५	१०९
१०—१५	५	११४
५—१०	४	११८
०— ५	२	१२०

सूत्र—

$$म_{क} = ल_{२} - \left[\frac{\frac{न}{२} - फ}{अ}\right] \times स$$

मध्यिका संख्या $\frac{न}{२} = \frac{१२०}{२} = ६०$

इसलिये, मध्यिका सम्भाग (२५ — ३०) है

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसलिये, $ल_2$ = ३० (उच्च सीमा)

फ = २४

अ = ४०

स = ५

$$\text{इसलिये } म_क = ३० - \left[\frac{६० - २४}{४०}\right] \times ५$$

$$= ३० - \frac{३६}{४०} \times ५$$

$$= ३० - \frac{९}{२}$$

$$= २५·५$$

मध्यिका के गुण :

१. इसकी गणना प्रत्येक समंक माला से की जा सकती है।

२. गणना सरल है इसलिए साधारण व्यक्ति भी इसका अर्थ समझ लेते हैं।

३. यह समंक माला के मध्य वाले पदों के मूल्य पर निर्भर है, इसलिए चरम मूल्यों के प्रभाव में भी इसे ज्ञात किया जा सकता है।

४. गुणात्मक समंकों के अध्ययन के लिए यह बहुत ही उपयुक्त समझी जाती है। गरीबी, ज्ञान, स्वास्थ्य के अध्ययन के लिए मध्यिका उत्तम समझी जाती है।

५. माप की प्रणाली बदलने से उसके मान में कोई अन्तर नहीं आता है।

६. मध्यिका साधारणतः समंक माला के ही अन्तर्गत स्थित होती है।

७. इसकी परिभाषा दृढ़ और स्पष्ट है।

८. सभी पदों के मानों को बिना ज्ञात किये हुए भी इसका मान निकाला जा सकता है।

९. इसे संचयी आवृत्ति वक्र से ज्ञात किया जा सकता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मध्यिका के दोष :

१. इसकी गणना करने के पूर्व समंक के पदों को आरोही या अवरोही क्रम में क्रमबद्ध करना आवश्यक है।

२. इसका उपयोग सीमित है। बीजगणित में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता।

३. पदों की संख्या से इसमें गुणा करने से श्रेणी का योग नहीं ज्ञात होता है।

४. यदि समंक माला के पदों में विषमता अधिक है तो इसकी स्थिति ऐसी हो सकती है कि जहाँ पर पदों के मूल्य बहुत कम या बहुत बड़े हों, वहाँ यह समंक माला का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकती है।

५. जब यह दो मूल्यों के बीच में होती है तो ठीक प्रकार से व्यक्त नहीं हो पाती।

६. दोनों तरफ से यदि अन्त के पद अधिक भारित हैं तो मध्यिका उपयोगी नहीं होती है, क्योंकि सभी पदों को समान महत्व देती है।

मध्यिका की उपयोगिता :

१. इसका प्रयोग ऐसी दशा में करना चाहिए जबकि आँकड़े अलग-अलग न नापे जा सकें, अर्थात् वे एक सीमा के अन्दर समूह में ही नापे जा सकते हैं। इसका प्रयोग धन, कला, वेतन इत्यादि के अध्ययन में करना चाहिए।

२. जब समंक माला के दोनों ओर अन्त के पदों का मूल्य अज्ञात हो।

३. असंतत समंक माला में इसका प्रयोग नहीं करना चाहिए।

४. इसकी स्थिति ऐसी होती है कि समंक माला के सभी पदों को ऐसे दो भागों में बाँटता है कि इससे एक तरफ के सभी मूल्य इससे बड़े और दूसरी तरफ के सभी मूल्य इससे छोटे होते हैं। अतः इसका प्रयोग वहाँ पर हो सकता है जहाँ पर समंक माला में किसी पद को आधे से अच्छा बताना है।

५. गुणात्मक व्यंजकों के अध्ययन में प्रयोग करना चाहिए।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

भूयिष्ठक या बहुबारी या बहुलक (Mode) :

किसी समंक माला में चार राशि के उस मान को भूयिष्ठक कहते हैं जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक होती है। अर्थात् चर राशि का वह मान है जो बार-बार आता रहता है। अथवा भूयिष्ठक सर्वाधिक घनत्व की स्थिति को कहते हैं।

हम प्रायः यह सुनते रहते हैं कि

१. मनुष्य की औसत ऊँचाई ५" ६०" है।

२. भारतीय आतिथ्यकारी (hospitable) होते हैं।

३. मनुष्य के कोट की लम्बाई ३६" होती है।

४. पाश्चात्य देशों में अधिकांश मनुष्य मांसाहारी हैं।

५. अधिकांश मनुष्य ईमानदार होते हैं।

६. बाटा के ८ नम्बर के जूते नवजवानों को फिट हो जाते हैं, इत्यादि।

उपरोक्त सभी दशाओं में औसत का तात्पर्य भूयिष्ठक से है। उपयोगी वस्तुओं के उत्पादन करने वाली कम्पनियों के लिए भूयिष्ठक सर्वाधिक महत्व की चीज है, क्योंकि इसकी जानकारी से वे उसी प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन करती हैं जिसकी उपभोगिता अधिक है। जैसे हम यह देखते हैं कि कम्पनियों में बने हुए जूते ऐसे आकार के होते हैं कि शायद ही कोई ऐसा मनुष्य हो जिसके पैर के लायक जूते न मिल सकें।

यदि ऐसा कोई होता है तो उसे मोची की शरण लेनी पड़ती है। इसी प्रकार से रेडी मेड कपड़े हर आकार के होते हैं।

भूयिष्ठक की गणना (Computation of Mode)

(क) खंडित माला (Discrete series) से गणना :

उदाहरण :

ऐसी खंडित माला जिममें महत्तम आवृत्ति का केवल एक मूल्य है।

किसी दर्जी ने एक दिन २० व्यक्तियों के कमीज की नाप इंचों में ली, जो निम्नलिखित हैं। तो भूयिष्ठक ज्ञात करो।

३०", ३३", ३१", ३२", ३१". ३२", ३०", ३२", ३०", ३१", ३२", ३३", ३२", ३१", ३२", ३२", ३१",३२", ३१", ३२",

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्न को निम्नांकित सारणी से हल करेंगे

चर राशि का मान इंचों में	आवृत्ति
३०	३
३१	६
३२	९
३३	२

सारणी को देखने से ज्ञात होता है कि महत्तम आवृत्ति ९ है, जिसके संगत चर का मूल्य ३२ है।

अतः भूयिष्ठ = ३२″

वर्गण विधि से भूयिष्ठक ज्ञात करना (Method of Grouping)

ऐसी माला जिसमें महत्तम आवृत्त के दो या दो से अधिक पद हैं या महत्तम आवृत्ति से कम अन्तर वाले बहुत से पद हैं तो भूयिष्ठक केवल देखकर नहीं ज्ञात किया जा सकता है। ऐसी दशा में वर्गण विधि प्रयोग में लाते हैं।

इस विधि का पूरा विवरण निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण :

निम्न सारणी से भूयिष्ठक ज्ञात करो।

चरम राशि का मान	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०	२१
आवृत्ति	३४	३८	४२	४६	४८	५१	५०	४३	५१	४३	४२	३८	३६

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

चर राशि का मान	आवृत्ति	वर्गण				
		दो, दो का		तीन, तीन का		
	(१)	(२)	(३)	(४)	(५)	(६)
९	३४	७२		११४		
१०	३८		८०		१२६	
११	४२	८८				१३६
१२	४६		९४	१४५		
१३	४८	९९			१४९	
१४	५१		१०१			१४४
१५	५०	९३		१४४		
१६	४३		९४		१४३	
१७	५१	१००				१४२
१८	४९		९१	१२९		
१९	४२	८०			११६	
२०	३८		७४			
२१	३६					

ऊपर की सारणी में स्तम्भ (२) और (३) में दो-दो आवृत्तियों का जोड़ रखा गया है और (४), (५), (६) में तीन-तीन आवृत्तियों का योग रखा गया है। स्तम्भ (२) में ऊपर से एक आवृत्ति छोड़कर, स्तम्भ (५) में एक आवृत्ति और (६) में दो आवृत्ति छोड़कर योग लिखा गया है। ऐसा इसलिए किया गया है कि सभी आवृत्तियाँ समूह में आ जायें। साधारण प्रश्नों के हल में दो-दो आवृत्तियों का योग दो बार और तीन-तीन आवृत्तियों का तीन बार करना पर्याप्त होता है, परन्तु आवश्यकता पड़ने पर चार-चार आवृत्तियों का योग भी रखा जा सकता है।

अब भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिये एक विश्लेषण सारणी बनाते हैं जिससे यह ज्ञात हो जाय कि वर्गण क्रिया में वह कौन-सा मूल्य है जो अधिक आवृत्ति वाले समूह में सबसे अधिक बार आता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	अधिकतम आवृत्ति वाले समूह में आने वाले पदों का मूल्य						
(१)	....	....	१४	....	....	१७	....
(२)	....	....	....	....	...	१७	१८
(३)	....	....	१४	१५	....	....	...
(४)	१२	१३	१४	....	...	....	....
(५)	....	१३	१४	१५	...	...	...
(६)	....	....	१४	१५	१६	...	...
पदों की संख्या	१	२	५	३	१	२	१

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट हो जाता है कि भूयिष्ठक १४ है क्योंकि १४ वह मूल्य है जो सर्वाधिक बार आया है।

टिप्पणी : दो या दो से अधिक महत्तम आवृत्ति वाले मूल्य यदि किसी समंक माला में हैं तो यही रीति अपनायी जायगी।

(ख) संतत माला (Continuous series) से भूयिष्ठक की गणना—

संतत समंक मालाओं के भूयिष्ठक निकालने में वर्गण रीति से काम लिया जाता है। पहले वर्गण रीति से वह सम्भागान्तर ज्ञात करते हैं जिसकी सीमाओं के अन्तर्गत भूयिठ्क निश्चित है। वह सम्भाग जिसमें भूयिष्ठक स्थिति होती है भूयिष्ठक सम्भाग (Modey Class) निम्नलिखित सूत्र से भूयिष्ठक ज्ञात करते हैं।

$$\text{भ (Mo)} = \text{ल}_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times \text{स} \quad \left(\text{ऋणात्मक चिह्नों का ध्यान न देते हुए}\right)$$

$$Mo = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$$

जब कि भ = भूयिष्ठक

$\text{ल}_1, L_1$ = भूयिष्ठक सम्भाग की निम्न सीमा (Lower limit)

Δ_1 = भूयिष्ठक सम्भाग और उसके पूर्व सम्भाग की आवृत्तियों का अन्तर

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Δ_2 = भूयिष्ठक सम्भाग और उसके बाद वाले सम्भाग की आवृत्तियों का अन्तर

स = भूयिष्ठक सम्भाग का विस्तार

उदाहरण : निम्नलिखित तालिका में कुछ व्यक्तियों की आयु के आँकड़े दिये हुए हैं, भूयिष्ठक आयु ज्ञात करो।

आयु वर्षों में	व्यक्तियों की संख्या
२०—२५	५
२५—३०	७
३०—३५	८
३५—४०	१८
४०—४५	१५
४५—५०	१२
५०—५५	७
५५—६०	५

गणना :

सम्भागान्तर	आवृत्ति	वर्गण: दो, दो का		वर्गण: तीन, तीन का			विश्लेषण सारणी: अधिकतम आवृत्ति के समूह आने वाले	
	(१)	(२)	(३)	(४)	(५)	(६)	सम्भागान्तर	संख्या
२०—२५	५	१२		२०				
२५—३०	७		१५		३३		|	१
३०—३५	८	२६				४१	| | |	३
३५—४०	१८		३३	५४			| | | |	४
४०—४५	१५	२७			३४		-||	५
४५—५०	१२		१९			२४	| | |	३
५०—५५	७	१२					|	१
५५—६०	५							

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उपर्युक्त सारणी से भूयिष्ठक सम्भाग (४०--४५) हैं,

इसलिये,

$$\text{ल}_1 = \text{४०}$$

और

$$\Delta_1 = (\text{१५} \backsim \text{१८}) = \text{३}$$

$$\Delta_2 = (\text{१५} \backsim \text{१२}) = \text{३}$$

[ध्यान रहे कि केवल अन्तर लेना है]

$$\text{स} = \text{५}$$

इसलिये,

$$\text{म} = \text{ल}_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times \text{स}$$

$$= \text{४०} + \frac{\text{३}}{\text{३} + \text{३}} \times \text{५}$$

$$= \text{४०} + \frac{\text{३}}{\text{६}} \times \text{५}$$

$$= \text{४०} + \frac{\text{५}}{\text{२}}$$

$$= \text{४०} + \text{२·५}$$

$$= \text{४२·५ वर्ष}$$

भूयिष्ठक के गुण—

१. साधारण समंक माला में इसे केवल देखकर ज्ञात कर सकते हैं।

२. इसका भाव सरलता से मस्तिष्क पर अंकित हो जाता है।

३. इस पर चरम पदों (Extreme items) का प्रभाव न्यूनतम होता है यदि वे भूयिष्ठक सम्भाग के पद नहीं हैं।

४. अन्य माध्यों की भाँति यह समंक माला के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता।

५. गणना की क्रिया सरल है।

६. इसे लेखाचित्रीय विधि से भी ज्ञात कर सकते हैं। जिन आवृत्ति वितरणों को वर्गांकित पत्र पर प्रांकित (Plot) करने से घन्टी के आकार का चक्र आता है, उनमें भूयिष्ठक का पता लगाना बड़ा ही सरल है।

७. किसी वस्तु की लोकप्रियता के अध्ययन के लिये बहुत उपयोगी है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

८- यह महत्तम आवृत्ति वाला मूल्य होता है, इसलिये समग्र के प्रत्येक न्यादर्श में उसका मान एक ही रहता है।

९. समंक में उसकी प्रत्याशा (Expectation) सबसे अधिक होती है।

भूयिष्ठक के दोष :

१. इसका प्रयोग बीजगणित की क्रियाओं में नहीं हो सकता।

२. यह अस्पष्ट और अनिश्चित होता है और आवृत्ति वितरण की विषमता में इसको निकालना कठिन है।

३. इसकी गणना समंक माला के सभी पदों पर आधारित नहीं होती इसलिये सभी पदों का महत्व समान नहीं रहता है।

४. इसको ज्ञात करने के लिये समंक माला के सभी पदों को आरोही या अवरोही क्रम में विन्यस्त करना आवश्यक है।

५. यदि केवल भूयिष्टक और चर राशि की संख्या दी हुई हो तो उनके कुल मूल्यों का योग ज्ञात नहीं हो सकता।

६. यह चरम मूल्य वाले पदों को कोई महत्व नहीं देता।

७. संतत माला में यदि सम्भागान्तर विस्तार बड़ा है तो इसकी गणना कल्पना मात्र है।

उपयोगिता : इसकी उपयोगिता व्यापारियों और व्यवसाइयों के लिये बहुत ही अधिक है। घनवातिक पूर्वानुमान (Meteorological forecasting) में भी यह अति उपयोगी है।

भारित मध्यक (Weighted Arithmetic Mean) : साधारण मध्यक निकालने में समंक माला के सभी पदों को समान महत्व दिया जाता है परन्तु समंक माला के विभिन्न पदों का अपना निजी महत्व है। इसलिये मध्यक निकालने के पहले हर एक पद का सापेक्ष महत्व देना आवश्यक है। इसे सांख्यिकीय भार (weight) कहा जाता है। पदों को भारित करके प्राप्त किये गये मध्यक को भारित मध्यक कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि कोई मनुष्य बाजार से, १० मीटर पापलीन २ रु० प्रति मीटर, १५ मीटर मलमल ४ रु० प्रति मीटर, १२ मीटर सफेद जीन ३ रु० प्रति मीटर की दर से क्रय करता है तो कपड़ों की औसत दर साधारण मध्यक

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

की रीति से $\frac{२+४+३}{३}$ = ३ रु० प्रति मीटर हुई। अब यदि यह ज्ञात करना हो कि उस मनुष्य को औसत मूल्य कितना देना पड़ा तो भारित माध्य निकालना पड़ेगा जो $\frac{\text{मूल्य}}{\text{मीटर}}$ के बराबर होगा।

अतः यदि भारित मध्यक = $भ_म$

$$\text{तो } भ_म = \frac{१० \times २ + १५ \times ४ + १२ \times ३}{३७}$$

$$= \frac{११६}{३७}$$

$$= ३.१४$$

भारित मध्यक निकालने की रीति :

यदि समंक माला के विभिन्न पदों के मूल्य

$य_1, य_2, य_3 \cdots\cdots य_न$ हैं

और, $भ_1, भ_2, भ_3 \cdots\cdots भ_न$ क्रमशः उनके भार हैं तो

$$भ_म = \frac{भ_1 य_1 + भ_2 य_2 + भ_3 य_3 + \cdots\cdots + भ_न य_न}{भ_1 + भ_2 + भ_3 + \cdots\cdots + भ}$$

$$\therefore \quad भ_म = \frac{\Sigma भ य}{\Sigma भ}$$

$$W = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 + \cdots\cdots + W_n X_u}{W_1 + W_2 + W_3 + \cdots\cdots + W_n}$$

$$= \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

उदाहरण : यदि १०० टमाटर के पौधों पर पके टमाटरों की संख्या निम्न प्रकार है तो प्रति पौधा टमाटरों का औसत बताओ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

पके टमाटर	पौधों की संख्या
०	८
१	२
२	७
३	१०
४	१५
५	१२
६	१०
७	२५
८	४
९	३
१०	६

हल:

पके टमाटर (य)	भार (भ)	भ य
०	८	०
१	२	२
२	७	१४
३	१०	३०
४	१५	६०
५	१२	६०
६	१०	६०
७	२५	१७५
८	४	३२
९	३	२७
१०	४	४०
	१००	५००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

इसलिये $भ_म = \frac{\Sigma भ य}{\Sigma भ} \quad \left(W = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}\right)$

$= \frac{५००}{१००} = ५$ टमाटर

भारित मध्यक की विशेषताएँ :

इसके गुण और दोष प्रायः वही हैं जो साधारण मध्यक के होते हैं परन्तु सांख्यिकी में भारित मध्यक को विशेष महत्व दिया जाता है। मूल्यों को कितना भार देना चाहिए इसके लिये कोई विशेष नियम नहीं है परन्तु छोटे मूल्यों को अधिक भार देने से महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकल सकता है। समंकमाला के विभिन्न मूल्यों को भारित करने में सांख्यिक (Statistician) को अपने अनुभव, तर्क और बुद्धि की पूर्ण सहायता लेनी चाहिए नहीं तो भ्रामक परिणाम निकल सकता है। इसका प्रयोग जन्म एवं मृत्युदर, उत्तीर्ण विद्यार्थियों की प्रतिशततायें, वेतन प्रति व्यक्ति आदि के तुलनात्मक अध्ययन में किया जाता है।

गुणोत्तर माध्य (Geometric mean) :

समान्तर माध्य अथवा मध्यक, समंकमाला के सभी पदों को समान महत्व देता है, परन्तु जब समंक माला के बड़े मूल्यों को कम और छोटे मूल्यों को अधिक भार देना होता है तो गुणोत्तर माध्य निकाला जाता है। जैसे जब समंकों के सापेक्ष मूल्य, अनुपात अथवा प्रशिशत में दिये हुये हों तो इस माध्य का प्रयोग बहुत लाभदायक है। इसलिये जनसंख्या की औसत वृद्धि ज्ञात करने के लिए उस माध्य को चुना जाता है।

गुणोत्तर माध्य निकालने की रीति :

यदि समंक माला के विभिन्न पद,

$य_१, य_२, य_३ \cdots\cdots य_न$ हैं तो,

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\text{गुणोत्तर माध्य ग} = \sqrt[न]{य_१ \times य_२ \times य_३ \times \cdots\cdots य_न}$$

[जब कि न पदों की संख्या है]

$$= य_१ \times य_२ \times य_३ \times \cdots\cdots \times य_न \; \frac{१}{न}f$$

$$\therefore \quad \text{लघु ग} = \frac{१}{न}\left[\text{लघु } य_१ + \text{लघु } य_२ + \text{लघु } य_३ + \cdots\cdots + \text{लघु } न^{य}\right]$$

$$= \frac{\Sigma \text{ लघु य}}{न}$$

$$\therefore \quad \text{ग} = \text{प्रति लघु}\left[\frac{\Sigma \text{ लघु य}}{न}\right]$$

$$\left(G = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \log x}{N}\right]\right)$$

उदाहरण—

यदि पाँच परिवारों की माहवारी आय क्रमशः १२०; २००, ३५०; ४०० और ५०० रुपये हों तो गुणोत्तर माध्य की गणना करो।

परिवार	आय रु० में य	लघु गणक (लघु य)
(क)	१२०	२·०७९२
(ख)	२००	२·३०१०
(ग)	३५०	२·५४४१
(घ)	४००	२·६०२१
(च)	५००	२·६९९०
न=५		Σ लघु य=१२·२२५४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$ग = प्रति\ लघु\left[\frac{\Sigma\ लघु\ य}{न}\right] = प्रति\ लघु\left(\frac{१२\cdot२२५४}{५}\right)$$

$$= प्रति\ लघु\ (२\cdot४४५१) = २७८\cdot७$$

आवृत्ति वितरण से गणना—

यदि समंक माला के विभिन्न पद

$य_1, य_2, य_3 \cdots\cdots य_न$ हैं

और इनकी आवृत्तियाँ क्रमशः

$अ_1, अ_2, अ_3 \cdots\cdots अ_न$ हैं तो

$$ग = \sqrt[न]{य_1^{अ_1} \times य_2^{अ_2} \times य^{अ_3} \times \cdots\cdots \times य_न^{अ_न}}$$

$$= \left[\ _1^{अ_1} \times य_2^{अ_2} + य_3^{अ_3} \times \cdots\cdots \times य_.\ ^{अ_न}\right]^{\frac{१}{न}}$$

$$\left(जबकि,\ न = अ_1 + अ_2 + अ_3 + \cdots\cdots + अ_न\right)$$

उभय पक्ष का लघुगणक लेने से

$$लघु\ ग = \frac{१}{न} अ_1 \left[लघु\ य_1 + अ_2\ लघु\ य_2 + अ_3\ लघु\ य_3 + — \ldots + अ_न\ लघु\ य_न \right]$$

$$= \frac{\Sigma\ अ\ लघु\ य}{न}$$

$$ग = प्रतिलघु\left[\frac{\Sigma अ\ लघु\ य}{न}\right], G = Antilog\left[\frac{\Sigma\ f\ \log\ x}{N}\right]$$

टिप्पणी : संतत माला में य, सम्भागान्तर की सीमाओं का मध्यमान होता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उदाहरण :

निम्नलिखित सारणी से गुणोत्तर माध्य की गणना करो ।

सम्भागान्तर	आवृत्ति (अ)
०—१०	२
१०—२०	३
२०—३०	१०
३०—४०	३
४०—५०	२

गणना :

सम्भागान्तर	आवृत्ति (अ)	मध्यमान (य)	लघु य	अ लघु य
०—१०	२	५	०·६९९०	१·३९८०
१०—२०	३	१५	१·१७६१	३·५२८३
२०—३०	१०	२५	१·३९७९	१३·९७९०
३०—४०	३	३५	१·५४४१	४·६३२३
४०—५०	२	४५	१·६५३२	३·३०६४
योग	२०			२६·८४४०

$$ग = प्रतिलघु \left[\frac{\Sigma अ\ लघु\ य}{न}\right]$$

$$= प्रतिलघु \left[\frac{२६·८४४०}{२०}\right]$$

$$= प्रतिलघु\ (१·३४२२)$$

$$= २१·९९$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

गुणोत्तर माध्य के गुण, दोष तथा उपयोगिता

गुण :

(१) इसकी परिभाषा स्पष्ट तथा दृढ़ है।

(२) सब पदों पर आधारित हैं।

(३) चरम पदों से अप्रभावित है।

(४) बीजगणितीय प्रयोग के लिये उपयुक्त है।

दोष :

(१) आकलन जटिल तथा लम्बा होता है।

(२) लघुगणकों का प्रयोग आवश्यक है।

(३) छोटे पदों को अधिक और बड़े पदों को कम महत्व देता है।

(४) कोई पद शून्य अथवा ऋणात्मक है तो यह माध्य अनुपयुक्त होता है।

उपयोगिता :

(१) जब समंक माला के पदों में अधिक विषमता होती है।

(२) जब छोटी राशियों को अधिक और बड़ी राशियों को कम महत्व देना हो।

(३) जब समंक माला के पदों की निष्पत्तियों का औसत लेना है।

(४) जनसंख्या की वृद्धि की दर निकालने में।

प्रथम खण्ड के अध्याय २ में

$$अ = म\left(१ + \frac{द}{१००}\right)^{स}$$ का प्रयोग देखो।

हरात्मक माध्य (Harmonic mean) :

यह समंक माला के पदों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) के समान्तर माध्य अथवा मध्यक का व्युत्क्रम होता है। इसकी गणना निम्नलिखित सूत्र से की जाती है। यदि हरात्मक माध्य को ह से व्यक्त करें, तो

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\frac{१}{ह} = \frac{१}{न}\left[\frac{१}{य_१} + \frac{१}{य_२} + \frac{१}{य_३} + \cdots\cdots + \frac{१}{य_न}\right]$$

$$\therefore \frac{१}{ह} = \frac{१}{न} \Sigma \left(\frac{१}{य}\right) \quad \left[\frac{1}{H} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{1}{X}\right)\right]$$

आवृत्ति वितरण से गणना :

यदि, $अ_१, अ_२, अ_३, \cdots\cdots अ_न$

क्रमशः पदों $य_१, य_२, य_३, \cdots\cdots य_न$ की आवृत्तियाँ हैं

$$तो, \frac{१}{ह} = \frac{१}{न}\left[\frac{अ_१}{य_१} + \frac{अ_२}{य_२} + \frac{अ}{य_३} + \cdots\cdots \frac{अ_न}{य_न}\right]$$

$$= \frac{१}{न} \Sigma \left(\frac{अ}{य}\right) \quad \left[\frac{1}{H} = \frac{1}{N} = \Sigma \frac{f}{X}\right]$$

जबकि $न = अ_१ + अ_२ + अ_३ + \cdots\cdots + अन$

उदाहरण :

निम्नलिखित सारणी से हरात्मक माध्य की गणना करो।

चर राशि का मान (क) x	आवृत्ति अ f	व्युत्क्रम $\left(\frac{१}{य}\right) \frac{1}{x}$	$\left(\frac{अ}{य}\right) \frac{f}{x}$
८	३	·१२५०	·३७५०
१०	४	·१०००	·४०००
१६	२	·०६२५	·१२५०
२०	६	-०५००	३·०००
२५	५	-०४००	·२०००
योग	२०		१·४०००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\frac{१}{ह} = \frac{१}{न} \Sigma \left(\frac{अ}{य}\right) \qquad \left(\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\Sigma \frac{f}{X}\right)$$

$$= \frac{१}{२०} \times १.४$$

$$= \frac{७}{१००} = .०७$$

$\therefore$ हरात्मक माध्य $= \frac{१००}{७} =$ १४.२९

इस माध्य की उपयोगिता बहुत कम है। विशेष परिस्थितियों में दरों का औसत निकालने में प्रयोग किया जाता है। जैसे जब प्रश्नों में दरें निम्न प्रकार से दी हुई होती हैं।

१. मील प्रति घण्टा : इसमें दूरी चर और समय अचर है।

२. मिनट प्रति मील : इसमें समय चर और दूरी अचर है।

३. रुपये प्रति दर्जन : इसमें रुपया चर और दर्जन अचर है।

अब जिसे दर में चर रखा गया है और प्रश्न मे उसे ही चर रखने को कहा गया है तो हरात्मक माध्य निकालना चाहिये। यह माध्य भी समान्तर और गुणोत्तर माध्य की तरह सभी पदों पर आधारित है। यह छोटे पदों को बहुत अधिक और बड़े पदों को बहुत कम महत्व देता है।

चतुर्थक (Quartiles) :

समंक के पदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में विन्यस्त कर लेने पर उन पदों के मूल्य जो समस्त पदों को चार भागों में बांट देते हैं चतुर्थक कहलाते हैं। प्रारम्भ से समस्त पदों को चौथाई करने वाले पद के मूल्य को प्रथम-चतुर्थक और अन्त से चौथाई करने वाले पद के मूल्य को तृतीय चतुर्थक और बीच वाले को द्वितीय चतुर्थक अथवा माध्यिका कहते हैं। प्रथम चतुर्थक को लघु चतुर्थक (Lower quartile) और तृतीय चतुर्थक को गुरु चतुर्थक (Upper quartile) भी कहते हैं।

यदि लघु चतुर्थक $च_1$ और गुरु चतुर्थक $च_3$ से व्यक्त किया जाय तो

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(क) खण्डित माला में—

$$च_1 = \left(\frac{न+१}{४}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$च_3 = ३\left(\frac{न+१}{४}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

(ख) संतत माला में—

$$च_1 = ल_1 + \left(\frac{\frac{न}{४} - फ}{अ}\right) \times स$$

$$च_3 = ल_1 + \left(\frac{\frac{३न}{४} - फ}{अ}\right) \times स$$

जब कि $\frac{न}{४}$, $\frac{३न}{४}$ ——→ चतुर्थक संख्यायें हैं

$ल_1$ ——→ सम्बन्धित सम्भाग की निम्न सीमा है

अ ——→ सम्बन्धित सम्भाग की आवृत्ति है

फ ——→ सम्बन्धित सम्भाग के पूर्व सम्भाग का संचयी आवृत्ति है

स ——→ सम्बन्धित सम्भाग का सम्भागान्तर है

प्रश्नावली ५

१. माध्य से क्या समझते हो ? ये कितने प्रकार के होते हैं ? सन्तोषजनक माध्य के गुण बताओ।

२. मध्यक, मध्यिका और भूयिष्ठक की परिभाषायें दो और गुण, दोष तथा उपयोगिता के आधार पर इनकी तुलना करो ।

३. समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य की परिभाषायें दो और गुण, दोष तथा उपयोगिता के आधार पर उनकी तुलना करो।

४. भारित माध्य की परिभाषा दो। पदों को भार क्यों दिया जाता है। इसमें और समान्तर माध्य में क्या अन्तर है ? इसके दोष, गुण और उपयोगिता बताओ ।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

माध्यों के निकालने का क्या उद्देश्य है।

५. प्रत्येक माध्य की उपयोगिता के क्षेत्र का वर्णन तर्क सहित करो।

६. बीस विद्यार्थियों की ऊँचाई निम्नलिखित हैं तो उनकी औसत ऊँचाई ज्ञात करो।

ऊँचाई इञ्चों में

४०,४५ ४८,६०,४६,७०.५६,५३,५२,६८
६६,४६,५३,५६,५८,५४,५३,५२,६६,६३

७. किसी कक्षा के दस विद्यार्थियों के भार निम्नलिखित हैं तो औसत भार ज्ञात करो।

भार पौण्ड में

१००,१०५,१०८,६५,१०१:१२१,११२,१०७,१२५,११०

८. किसी क्षेत्र के १० परिवारों की मासिक आय निम्नांकित सारणी से प्रदर्शित है तो समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य की गणना करो और बताओ कि इनमें से कौन सा माध्य समंक माला का सही प्रतिनिधित्व करता है।

परिवार	आय रु० में	परिवार	आय रु० में
क	८५	छ	८
ख	७०	ज	४२
ग	१०	झ	२५०
घ	७५	त	४०
च	५००	थ	३६

[बी० काम० आगरा १६४५]

६. किसी कारखाने के २५० मजदूरों को साप्ताहिक मजदूरी रुपयों में निम्नलिखित सारणी से व्यक्त की गई है तो भूयिष्ठक की गणना करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मजदूरी प्रति सप्ताह रुपयों में	३०—४०	४०-५०	५०-६०	६०-७०	७०-८०	८०-९०	९०-१००
मजदूरों की संख्या	११	२६	६३	८१	३५	२१	१३

१०. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के मध्यिका की गणना करो।

लड़कों का भार पौण्ड में	संख्या
१००—१०४	४
१०५—१०९	१४
११०—११४	६०
११५—११९	१३०
१२०—१२४	२०६
१२५—१२९	२९८
१३०—१३४	३८०
१३५—१३९	४५०
१४०—१४४	५००
१४५—१४९	४३०
१५०—१५४	२६०
१५५—१५९	१२८
१६०—१६४	६६
१६५—१६९	२८
१७०—१७४	१०

११. निम्नलिखित सारणी में १५० बिजली के लैम्पों के जीवन काल दिये गये हैं तो मध्यक, मध्यिका और भूयिष्ठक की गणना करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जीवन काल घन्टों में	लैम्पों की संख्या
०— ४००	४
४००— ८००	१२
८००—१२००	४०
१२००—१६००	४१
१६००—२०००	२७
२०००—२४००	१३
२४००—२८००	९
२८००—३२००	४

१२. अ और ब दो महाविद्यालयों के परीक्षा फल निम्नांकित सारणी में दिये गये हैं तो ज्ञात करो कि कौन सा महाविद्यालय अधिक उत्तम है और क्यों ?

महाविद्यालय अ			महाविद्यालय ब		
कक्षा	परीक्षार्थियों की संख्या	उत्तीर्ण	कक्षा	परीक्षार्थियों की संख्या	उत्तीर्ण
एम० ए०	३०	२५	एम० ए०	१००	८०
एम. एस.-सी.	५०	४५	एम. एस-सी.	१२०	९५
बी० ए०	२००	१५०	बी० ए०	१००	७०
बी. एस-सी	१२०	७५	बी. एस-सी.	८०	५०
योग	४००	२९५		४००	२९५

[बी० कॉम लखनऊ १९४:]

संकेत : पहले उत्तीर्ण प्रतिशततायें निकालो, फिर इन प्रतिशतताओं को सम्मिलित होने वालों की संख्या से भारित करके भारित माध्य निकालो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१३. निम्नलिखित वितरण का मध्यक निकालो

लाभ प्रति दुकान रु० में	दुकानों की संख्या
०—१०	१२
१०—२०	१८
२०—३०	२१
३०—४०	२०
४०—५०	१७
५०—६०	६

[बी० काम० राजस्थान १९५३]

१४. ५० श्रमिकों की मासिक पारिश्रमिक निम्नलिखित है तो सम्भाग विस्तार ५ रु० लेकर इस समंक को विन्यस्त करो और भूयिष्ठक पारिश्रमिक की गणना करो ।

पारिश्रमिक रुपये में

४०, ४२, ४४, ४४, ४५, ४५, ४५, ४६, ४८, ४८
५०, ५०, ५०, ५०, ५०, ५२, ५३, ५४, ५५, ५५
५५, ५५, ५५, ५६, ५६, ५८, ५८, ५९, ६०, ६०
६०, ६०, ६०, ६२, ६४, ६५, ६५, ६५, ६५, ६६
६८, ७०, ७०, ७०, ७१, ७२, ७५, ७५, ७५, ८०

[बी० काम० राजस्थान १९५६]

१५. निम्न सारणी में बाटा की दूकान पर एक दिन में बिके हुये जूतों के आकार दिये गये हैं । भूयिष्ठक ज्ञात करो ।

आकार	३·५	४·०	४·५	५·०	५·५	६·०	६.५	७·०	७·५	८·०	८·५	९·०
जूतों की संख्या	३०	७	५	१०	२०	२३	३०	२०	१६	४	६	३०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१६. मध्यक, मध्यिका तथा भूयिष्ठक की परिभाषा लिखो। इनका मान निम्न सारणी से ज्ञात करो जिसमें एक बगीचे के पेड़ों की ऊँचाइयों की आवृत्तियां दी गई हैं :—

ऊँचाई	आवृत्ति
७ फीट से नीचे	२६
१४ "	५७
२१ "	९२
२८ "	१३४
३५ "	२१६
४२ "	२८७
४९ "	३४१
५२ "	३६०

[आगरा, १९४७]

१७. इंगलैंड और भारत में १९३१ में हुई जनगणना में विभिन्न आयु के वर्गों के अनुसार मनुष्यों की संख्या दी हुई है। तो इंगलैंड और भारत के मनुष्यों की औसत आयु की तुलना करो।

आयु वर्ग	इंगलैंड (लाख में)	भारत (लाख में)
०—५	१८	२१४
५—१०	१९	२५८
१०—१५	२०	२२२
१५—२०	१८	१५७
२०—२५	१६	१४५
२५—३०	१४	१६१
३०—३५	२७	२५७
३५—४०	२५	१८४
४०—४५	१९	१२०
४५ से ऊपर	१७	१००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१८. किसी विद्यालय की अ तथा ब दो कक्षाओं के विद्यार्थियों द्वारा एक परीक्षा में प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं। बुद्धिमत्ता के विचार से दोनों कक्षाओं की तुलना करो।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	
	कक्षा अ	कक्षा ब
५—१०	१	५
१०—१५	१०	६
१५—२०	२०	१५
२०—२५	८	१०
२५—३०	६	५
३०—३५	३	४
३५—४०	१	२
४०—४५	०	२

१९. किसी महाविद्यालय में ५ प्रोफेसर, २० लेक्चरार, ५ सहायक अध्यापक, १० क्लर्क तथा १२ चपरासी हैं। उनके वेतन क्रमशः ५०० रु०, ३०० रु०, १५० रु०, १०० रु० तथा ७५ रु० हैं। महाविद्यालय के प्रतिव्यक्ति का औसत वेतन बताओ।

२०. निम्न सारणी में दिये गये आँकड़ों का समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य ज्ञात करो।

सम्भागान्तर	आवृत्ति
०—१०	२
१०—२०	४
२०—३०	६
३०—४०	३

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२१. निम्न सारणी में एक मजदूर वर्ग की मासिक आय दी गई है। इससे भूयिष्ठक तथा मध्यिका ज्ञात करो।

मजदूरी रु० में	२०—	२१—	२२—	२३—	२४—	२५—	२६—	२७—	२८—२९
मजदूरों से की संख्या	८	१०	११	१६	२०	२५	१५	९	६

२२. निम्न सारणी से प्रति सेर मिठाई का औसत मूल्य ज्ञात करो समान्तर तथा भारित माध्य। दोनों संगणित करके बताओ कि कौन सा माध्य औसत मूल्य का अच्छा द्योतक है।

मूल्य प्रति सेर	बिक्री सेरों में
४·५० रु०	१०
४·०० रु०	२५
३·०० रु०	४०
२·५० रु०	६०
१·५० रु०	१००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

6 अपकिरण (विक्षेपन) की मापें (MEASURES OF DISPERSION)

किसी समंक समूह के विभिन्न पदों में आपसी विस्तार, फैलाव या बिखराव को अपकिरण कहते हैं। जब समंक समूह के विभिन्न पदों का विचलन उनके औसत मान से अधिक होता है तो कहा जाता है कि अपकिरण अधिक है और यदि विचलन कम है तो कहा जाता है कि अपकिरण कम है। उदाहरणार्थ यदि कक्षा के ५० विद्यार्थियों की ऊँचाई ६० से ६५ इञ्च के बीच है और दूसरी कक्षा के केवल २० विद्यार्थियों की ऊँचाई ५४ इञ्च से ७० इञ्च तक है तो हम यह कहेंगे कि पहली कक्षा के विद्यार्थियों की ऊँचाइयों में दूसरी की अपेक्षा अपकिरण कम है। विभिन्न श्रेणियों में अंक किस हद तक बिखरे हुए हैं, उनके बढ़ने अथवा घटने की गति क्या है, इन सब बातों का उत्तर अपकिरण से मिलता है। अतः अपकिरण किसी समूह के अंकों के बिखराव अथवा विचलन की सीमा बतलाने वाला माप है। अपकिरण की कुछ मुख्य मापें निम्नलिखित हैं।

विस्तार अथवा परिसर या परास (Rnge) : विस्तार अपकिरण का सरलतम माप है। इसका मान समंक माला के महत्तम और लघुतम पदों के अन्तर के बराबर होता है। यह अपकिरण का शुद्ध माप नहीं है, इसलिये इसका विशेष महत्व नहीं है। समंक माला में किसी बहुत छोटे या बहुत बड़े अंक के आ जाने से यह व्यानुपातिक रूप से प्रभावित हो जाता है। जैसे किसी कक्षा के सबसे कम भार वाले विद्यार्थी का भार ३० किलोग्राम और सबसे अधिक भार वाले विद्यार्थी का भार ६० किलोग्राम है तो विस्तार (परास) (६०—३०) = ३० किलोग्राम। चूंकि यह माप केवल दो पदों के मूल्यों पर निर्भर करता है इसलिए अपकिरण (विक्षेपन) का शुद्ध माप नहीं होता है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मध्यक विचलन (Mean deviation) : जब किसी समंक माला के समान्तर माध्य से उसके विभिन्न पदों का विचलन निकाला जाता है तो इसका मान धनात्मक और ऋणात्मक दोनों होता है उन सभी विचलनों को जोड़ने से परिणाम शून्य होता है और यदि इसे पदों की संख्या से विभाजित करें तो यह फल भी शून्य होगा। इसलिये मध्यक विचलन निकालते समय समस्त विचलनों के चिह्नों पर बिना ध्यान दिये केवल संख्यात्मक दृष्टि से जोड़ लेते हैं और उसका समान्तर माध्य निकाल लेते हैं। इस प्रकार से प्राप्त फल को मध्यक विचलन' कहते हैं। चिह्न रहित विचलनों को निरपेक्ष विचलन (Absolute deviation) कहते हैं और निरपेक्ष विचलन का मध्यक ही मध्यक-विचलन कहलाता है।

यदि मध्य विचलन को संकेत म० वि० से प्रयुक्त किया जाय तो,

$$\text{म० वि०} = \frac{१}{\text{न}} \Sigma \mid \text{च} \mid \quad \left(\text{M. D.} = \frac{1}{N} \Sigma \mid x \mid \right)$$

जब कि

न (N) = पदों की संख्या

च (x) = समान्तर माध्य (मध्यक) से विचलन = य — म

। च । = निरपेक्ष विचलन [अर्थात् केवल संख्या की दृष्टि से जोड़]

आवृत्ति वितरण की दशा में—

$$\text{म० वि०} = \frac{१}{\text{न}} \Sigma \mid \text{अ च} \mid \quad \left(\frac{1}{N} \Sigma \mid fx \mid \right)$$

जब कि

अ, च की आवृत्ति है।

समान्तर माध्य से मध्यक विचलन की गणना :

उदाहरण : निम्नांकित सारणी से कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक व्यक्त किये गये हैं, तो मध्यक विचलन की गणना करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
०—१०	२
१०—२०	४
२०—३०	१०
३०—४०	३
४०—५०	१

गणना : श्रेणी का समान्तर माध्य=२३·५

सम्भागान्तर	आवृत्ति म	मध्यमान य	समान्तर माध्य (२३·५) से विचलन च=य—२३·५	अ च	। अ च ।
०—१०	२	५	—१८·५	—३७	३७
१०—२०	४	१५	— ८·५	—३४	३४
२०—३०	१०	२५	१·५	१५	१५
३०—४०	३	३५	११·५	३४·५	३४·५
४०—५०	१	४५	२१·५	२१·५	२१·५
योग	२०			०	१४२

$$\text{म० वि०} = \frac{१}{\text{न}} \Sigma \,।\, \text{अ च} \,।$$

$$= \frac{१}{२०} \times १४२$$

$$= ७·१$$

टिप्पणी : श्रेणी का समान्तर माध्य (२३·५) विगत अध्याय में बताई गई रीति से निकाला गया है। मध्यक विचलन समान्तर माध्य के अतिरिक्त अन्य माध्यों से भी निकाला जा सकता है। जैसे माध्यिका से मध्यक विचलन, भूयिष्ठक से मध्यक विचलन इत्यादि। हर दशा में उपर्युक्त रीति का प्रयोग करेंगे।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

मध्यिका (Median) से मध्यक विचलन

उदाहरण १ : निम्नलिखित आवृत्ति वितरण (बंटन) से माध्यिका से मध्यक विचलन (Mean deviation) ज्ञात करो।

चर	५	८	१०	१५	२०	२४
आवृत्ति	३	४	५	१२	१०	७

माध्यिका निकालने की रीति से दी हुई श्रे० का माध्यिका = १५

चर य	आवृत्ति अ	माध्यिका से विचलव ब = य − मक = य − १५	चिह्न निरपेक्ष विचलन और आवृत्ति का गुणनफल अ । ब ।
५	३	−१०	३०
८	४	− ७	२८
१०	५	− ५	२५
१५	१२	०	००
२०	१०	५	५०
२४	७	९	६३
	न=४१		Σ अ । ब. । = १९६

$$\text{अतः म० वि०} = \frac{\Sigma \text{अ} / \text{ब} /}{\text{न}} = \frac{१९६}{४१} = ४\cdot८$$

प्रमाप विचलन (Standard deviation)

अपकिरण का यह माप बहुत ही महत्वपूर्ण है। इसलिये इसके प्रयोग का क्षेत्र बहुत ही विशाल है। मध्यक विचलन चिह्न (+) या (—) का ध्यान न देते हुए कुल विचलनों का औसत होता है, जो बीजगणित के सिद्धान्तों की अवहेलना है। इस गणितीय अशुद्धि को ठीक करने के लिये दूसरी पद्धति से काम लिया गया है। समान्तर माध्य से विचलनों को निकाल कर इनका वर्ग कर दिया जाता है। और फिर इन्हें जोड़ कर औसत निकाल लेते हैं। इस औसत के वर्गमूल को प्रमाप विचलन कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

यदि प्रमाप विचलन के लिये संकेत प्र० वि० प्रयुक्त किया जाय तो,

$$\text{प्र० वि०} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ च}^2}{\text{न}}} \quad \left[S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \right]$$

जबकि,

च = समान्तर माध्य से विचलन

न = पदों की संख्या :

उदाहरण :

५ मजदूरों की प्रति दिन की मजदूरी निम्नलिखित है तो प्रमाप विचलन की गणना करो।

२ रु०, ३ रु०, ५ रु०, ६ रु०, और ९ रु०

$$\text{समान्तर माध्य म} = \frac{२+३+५+६+९}{५} = ५ \text{ रु०}$$

य	च = य − म = य − ५	च²
२	—३	९
३	—२	४
५	०	०
६	१	१
९	४	१६
योग		३०

$$\text{प्र० वि०} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ च}^2}{\text{न}}} = \sqrt{\frac{३०}{५}}$$

$$= \sqrt{६}$$

$$= २.४८$$

और यदि आवृत्ति हो तो,

$$\text{प्र० वि०} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ आ च}^2}{\text{न}}} \quad \left[S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N}} \right]$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

जबकि अ, च की आवृत्ति है।

उदाहरण : निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से प्रमाप विचलन की गणना करो।

सम्भागान्तर	०—१०	१०—२०	२०—३०	३०—४०	४०—५०
आवृत्ति	२	४	१०	३	१

सम्भागान्तर	आवृत्ति अ f	मध्यमान य X	स० मा० (२३·५) से विचलन च च=य—म(X–M)	च² d²	अ च² f d²
०—१०	२	५	—१८·५	३४२·२५	६८४·५०
१०—२०	४	१५	— ८·५	७२·२५	२८९·००
२०—३०	१०	२५	१·५	२·२५	२२·५०
३०—४०	३	३५	११·५	१३२·२५	३९६·७५
४०—५०	१	४५	२१·५	४६२·२५	४६२·२५
योग	२०				१८५५·००

$$\text{प्र० वि०} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ अ च}^2}{\text{न}}}$$

$$= \sqrt{\frac{१८५५}{२०}}$$

$$= \sqrt{\frac{३७१}{४}}$$

$$= ९\cdot६३$$

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

लघुरीति : (कल्पित माध्य चुनकर)

उपर्युक्त विधि से गणना करने में समान्तर माध्य निकालने की आवश्यकता होती है जिससे गणना करने में अधिक परिश्रम करना पड़ता है। कल्पित माध्य की सहायता से गणना सरल है। इस रीति से गणना का सूत्र निम्नलिखित है।

$$\text{प्र० वि०} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ अ च}^2}{\text{न}}}$$

$$\text{किन्तु} \quad \Sigma \text{ अ च}^2 = \Sigma \text{ अ ब}^2 - \frac{\Sigma (\text{अ ब})^2}{\text{न}}$$

$$\text{इसलिए प्र० वि०} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ अ ब}^2}{\text{न}} - \left(\frac{\Sigma \text{ अ ब}}{\text{न}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

जबकि ब = कल्पित माध्य से विचलन
अ = संगति आवृत्ति
न = पदों की संख्या

लघु रीति से प्रमाप विचलन की गणना :

सम्भागान्तर	आवृत्ति अ f	मध्यमान य X	कल्पित माध्य (२५) से विचलन ब (x)	अ ब f x	अ ब² fx^2
०—१०	२	५	—२०	—४०	८००
१०—२०	४	१५	—१०	—४०	४००
२०—३०	१०	२५	०	०	०
३०—४०	३	३५	१०	३०	३००
४०—५०	१	४५	२०	२०	४००
योग	२०			—३०	१९००

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

$$\frac{\Sigma \text{ अ ब}^2}{\text{न}} = \frac{१९००}{२०} = ९५$$

$$\left(\frac{\Sigma \text{ अ ब}}{\text{न}}\right)^2 = \left(\frac{-३०}{२०}\right)^2 = \frac{९}{४} = २\text{·}२५$$

$$\text{इसलिये प्र० वि०} = \sqrt{९५ - २\text{·}२५}$$

$$= \sqrt{९२\text{·}७५}$$

$$= ९\text{·}६३$$

टिप्पणी : उपर्युक्त विधि को और भी सरल बना सकते हैं। यदि सम्भागान्तर स है, तो ब, $\frac{\text{ब}}{\text{स}}$, $\frac{\text{अ ब}}{\text{स}}$ और $\frac{\text{अ ब}_2}{\text{स}}$ के स्तम्भ बना लेते हैं और इसकी सहायता से Σ अ ब और Σ अ ब^2 का मान ज्ञात कर लेते हैं क्योंकि

$$\Sigma \text{ अ ब} = \text{स} \times \Sigma \frac{\text{अ ब}}{\text{स}}$$

$$\text{और} \quad \Sigma \text{ अ ब}^2 = \text{स} \times \Sigma \frac{\text{अ ब}^2}{\text{स}}$$

इस विधि को पद—विचलन रीति (Step deviation method) कहते हैं।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उपर्युक्त उदाहरण को पद-विचलन रीति से हल करना—

सम्भागान्तर	आवृत्ति अ	मध्यमान य	कल्पित माध्य (२५) से विचलन व	$\frac{\text{व}}{\text{स}}$	$\frac{\text{अ व}}{\text{स}}$	$\frac{\text{अ व}^2}{\text{स}}$
०—१०	२	५	—२०	—२	—४	८०
१०—२०	४	१५	—१०	—१	—४	४०
२०—३०	१०	२५	०	०	०	०
३०—४०	३	३५	१०	१	३	३०
४०—५०	१	४५	२०	२	२	४०
योग	२०				—३	१९०

इसलिए $\Sigma \text{ अ व} = \text{स} \times \Sigma \frac{\text{अ व}}{\text{स}}$

$= १० \times (—३) = —३०$

और $\Sigma \text{ अ व}^2 = \text{स} \times \Sigma \frac{\text{अ व}^2}{\text{स}}$

$= १० \times १९० = १९००$

इसलिये $\left(\frac{\Sigma \text{ अ व}}{\text{न}}\right)^२ = \left(\frac{—३०}{२०}\right)^२ = \frac{९}{४} = २·२५$

और $\frac{\Sigma \text{ अ व}^2}{\text{न}} = \frac{१९००}{२०} = ९५$

इसलिये प्र० वि० $= \sqrt{९५ - २·२५}$

$= \sqrt{९२·७५}$

$= ९·६३$

विचरण मापांक (Variance) : प्रमाप विचलन के वर्ग को विचरण मापांक कहते हैं। जैसे उपरोक्त उदाहरण में ९२·७५ विचरण मापांक है।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation).

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{प्र० वि०}}{\text{म}} \times १००$$

जबकि प्र० वि० = प्रमाप विचलन

म = समान्तर माध्य (मध्यक)

अपकिरण का यह माप महत्त्वपूर्ण है। दो या दो से अधिक समंक मालाओं की सजातीयता, संगतता (Consistency), विजातीयता आदि की तुलना करनी हो तो विचरण-गुणांक निकालना चाहिए।

चतुर्थक विचलन (Quartile deviation)

अपकिरण का एक माप अर्द्ध-अन्तर्चतुर्थक विस्तार (Semi-interquartile range) अथवा चतुर्थक विचलन है। इसके नाम से प्रकट है कि यह चतुर्थकों के अन्तर का औसत है। यदि समंक-माला नियमित अथवा सममितीय (Symmetrical) है तो मध्यिका गुरु-चतुर्थक (Upper-quartile) और लघु-चतुर्थक (Lower-quartile) के ठीक बीच में होगा, परन्तु ऐसा सममितीय श्रेणी में ही सम्भव है। यदि चतुर्थक विचलन के लिये संकेत 'च० वि०, प्रयुक्त किया जाय तो

$$\text{च० वि०} = \frac{\text{च}_3 - \text{च}_1}{२}$$

जब कि, च_3 = गुरु चतुर्थक

च_1 = लघु चतुर्थक

तुलना में चतुर्थक विचलन गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{\text{च}_3 - \text{च}_1}{\text{च}_3 + \text{च}_1}$$

प्रमाप विभ्राग (Standard error) :

सांख्यिकी का उद्देश्य समग्र के विभिन्न लक्षणों का अध्ययन करना है जो निदर्शन अनुसन्धान (Sampling investigation) से ही सम्भव है। इसलिये किसी लक्षण का प्रतिनिधि निदर्शन आगणन ही माना जाता है। समग्र के किसी लक्षण के वास्तविक मान और उसी लक्षण के निदर्शन आगणन में जो अन्तर होता है, उसी को निदर्शन अनुसन्धान का विभ्रम (Sampling error) कहते हैं। जैसे समग्र से लिये गये न्यादर्श

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(Samlpe) के मध्यक और समग्र के वास्तविक मध्यक में जो अन्तर होता है वही मध्यक के लिये निदर्शन अनुसन्धान का विभ्रम कहलायेगा। यदि समग्र का वास्तविक मध्यक म द्वारा और समान आकार वाले विभिन्न न्यादर्शों मध्यक $म_1$, $म_2$, $म_3$............इत्यादि व्यक्त किये जायँ तो म इन मध्यकों का समान्तर माध्य होगा और $म_1$, $म_2$, $म_3$, इत्यादि का समग्र के मध्यक म से प्रमाप विचलन समान्तर माध्य का प्रमाप विभ्रम (Standard error of the mean) कहलायेगा। इसी प्रकार अन्य निदर्शन आगणनों के भी प्रमाप विभ्रम होते हैं। जैसे मध्यका का प्रमाप विभ्रम, भूयिष्ठक का प्रमाप विभ्रम, प्रमाप विचलन का प्रमाप विभ्रम इत्यादि।

परन्तु समग्र से हर सम्भव तरीके से समान आकार के न्यादर्शों का निकालना सम्भव नहीं है जैसे १०० गांवों में से १० को एक साथ लेकर न्यादर्शों की कुल संख्या $१०० स_{१०}$ होगी। इसलिये एक ही न्यादर्श से निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके समान्तर माध्य का प्रमाप विभ्रम निकाल लेते हैं।

$$\text{समान्तर माध्य (मध्यक) का प्रमाप विभ्रम} = \frac{\text{प्र० वि०}}{\sqrt{\text{न}}}$$

जबकि प्र० वि० = न्यादर्श के पदों का प्रमाप विचलन

न = न्यादर्श के पदों की संख्या।

प्रमाप विभ्रम किसी आगणन (Estimate) की सुतथ्यता (Precision) जाँचने के प्रयोग में लाया जाता है परन्तु अब यह कार्य सम्भाव्य विभ्रम (Probable error) द्वारा लिया जा रहा है जो प्रमाप विभ्रम का ·६७४४९ गुना होता है।

इसलिये,

सम्भाव्य विभ्रम = ·६७४४९ × प्रमाप विभ्रम

उदाहरणमाला ६

१. एक उपयुक्त उदाहरण की सहायता से अपकिरण का अर्थ समझाओ। इसके मापने की कौन-कौन सी विधियाँ हैं? सर्वोत्तम विधि का वर्णन करो।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

२. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखो।
(क) विस्तार (ख) चतुर्थक विचलन (ग) विचरण गुणांक
(घ) प्रमाप विभ्रम (च) सम्भाव्य विभ्रम (छ) मध्यक विचलन

३. उत्तरप्रदेश के २० कृषि फार्मों पर ईख की उपज निम्नलिखित है तो मध्यक विचलन और प्रमाप विचलन की गणना करो।

ईख की उपज टन में

१८, १५, २८, २०, १७, २३, १६, १९, २०, १९, १९, २५, १९, १३, २१, २३, २१, २७, १८ और २२

४. उदाहरणमाला ५ के २० वें प्रश्न की सारणी से मध्यक और प्रमाप विचलन की गणना करो।

५. निम्न सारणी से मध्यक विचलन, प्रमाप विचलन और विचरण गुणांक की गणना करो।

साप्ताहिक मजदूरी	मजदूरों की संख्या
४—६	१०
६—८	३०
८—१०	४०
१०—१२	१५
१२—१४	५

६. निम्नांकित सारणी की सहायता से मध्यक, प्रमाप विचलन तथा विचरण मापांक(Variance) की गणना करो।

आयु	मनुष्यों की संख्या
१० साल से नीचे	५
२० ,,	१०
३० ,,	२०
४० ,,	१०
५० ,,	५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

७. निम्नांकित सारणी की सहायता से मध्यक, मध्यक-विचलन, प्रमाप विचलन निकालो।

पारिश्रमिक	श्रमिकों की संख्या
१० रु० तक	१०
२० ,,	१५
३० ,,	२५
४० ,,	३०
५० ,,	२०

८. निम्नलिखित से प्रमाप विचलन और स० मा० (मध्यक) का प्रमाप विभ्रम निकालो।

सम्भागान्तर	आवृत्ति
०— ५	२
५—१०	३
१०—१५	१०
१५—२०	३
२०—२५	२

९. निम्नलिखित आंकडों से प्रमाप विचलन ज्ञात करो :

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
०—१०	५
१०—२०	१०
२०—३०	२०
३०—४०	४०
४०—५०	३०
५०—६०	२०
६०—७०	१०
७०—८०	४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१०. निम्नलिखित आवृत्ति सारणी का माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात करो :

चर	६	१२	१८	२४	३०	३६	४२
आवृत्ति	४	७	९	१८	१५	१०	५

११. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए समान्तर माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करो :

सम्भागान्तर	आवृत्ति
२—४	२
४—६	७
६—८	१०
८—१०	९
१०—१२	५
१२—१४	१

१२. निम्न सारणी में २६ विद्यार्थियों के सांख्यिकी में प्राप्तंक दिए गये है। कल्पित माध्य लेकर मानक विचलन ज्ञात करो।

विद्यार्थियों की संख्या	६	१०	१२	१०	८
प्राप्तांक	२	६	१०	१४	१८

१३. निम्नसारणी में १०० पौवों की ऊँचाई दी गई है। उसका समान्तर माध्य तथा मानव विचलन ज्ञात करो :

पौवों की संख्या	२	०	१५	२९	२५	१२	१०	४	३
ऊंचाई सेमी० में	६०	६१	६२	६३	६४	६५	६६	६७	६८

—

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उत्तर प्रदेश बोर्ड हाई स्कूल परीक्षा प्रश्न-पत्र

१९६२

१. एक गाय ६४ रु० में २० प्रतिशत की हानि से बेची गई, गाय का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिये।

२. अ और ब दो पाठशालाओं के बीच क्रिकेट के खेल में अ ने प्रथम पाली में ब से ८५ रन अधिक बनाये, परन्तु दूसरी पाली में ब ने अ से ६४ प्रतिशत अधिक रन बनाकर ४३ रन से विजय प्राप्त की। ज्ञात कीजिए कि दूसरी पाली में प्रत्येक पाठशाला के कितने रन बने ?

१९६३

१. एक दूकानदार ने एक मेज ३५ रु० में खरीदी और उसे २० प्रतिशत लाभ पर एक फुटकर दूकानदार के हाथ बेच दी। यदि फुटकर दूकानदार ने वह ५६ रु० ७० पैसे में बेचा हो तो उसकी अपनी लागत पर कितने प्रतिशत लाभ हुआ ?

२. एक व्यक्ति ने कुछ माल क्रय किया जिसका $\frac{१}{३}$, १४% लाभ पर बिका और $\frac{३}{५}$, १७$\frac{१}{२}$% प्रतिशत लाभ पर। यदि अब वह शेष माल को २०% लाभ से बेचे तो उसे कुल कितना प्रतिशत लाभ हुआ ?

३. कुछ धन ४% चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दिया गया। यदि दूसरे वर्ष का ब्याज पहले वर्ष के ब्याज से ०·८८ रुपया अधिक हो, तो मूलधन बताइये।

१९६४

१. एक मोटरकार का क्रय मूल्य ७,००० रुपया है। उसे कितने में बेचा जाय कि ३० प्रतिशत लाभ हो।

२. किसी धन का मिश्रधन एक वर्ष के अन्त में २,६०० रु० और चक्रवृद्धि ब्याज की दर से तीन वर्ष के अन्त में २,८१२ रु० १६ पैसे हो जाता है। ब्याज की दर और धन ज्ञात कीजिये।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. अ, ब और स ने मिलकर एक काम किया जिसके लिये उन्हें कुल ७२ रु० ४५ पैसे मजदूरी मिली। यदि पूरे काम को अ अकेले ३ दिन में, ब ४ दिन में और स ६ दिन में कर सकता है तो हरएक को कितनी-कितनी मजदूरी बाँटी जानी चाहिए ?

१९६५

१. एक मनुष्य अपनी मासिक आय का २० प्रति शत बचाता है। यदि महँगाई के कारण उसका खर्च २० प्रतिशत बढ़ जाय और उसे केवल २० रु० मासिक ही बचें तो उसकी मासिक आय ज्ञात कीजिये।

२. बारूद बनाने के लिये शोरा, गंधक और कोयला ३३ : ५ : ७ के अनुपात में लिया जाता है। यदि १९८ किलोग्राम शोरा प्रयुक्त हुआ हो, तो कुल कितनी बारूद तैयार हुई ?

३. एक काम पर ४ मनुष्य तथा १० लड़के लगाये गये। उन्होंने ६ दिन में उस काम का $\frac{१}{२}$ भाग कर लिया। तत्पश्चात् २ मनुष्य तथा २ लड़के उस काम पर बढ़ा दिये गये। ३ दिन में उस काम का $\frac{१}{३}$ भाग और हो गया। यदि शेष काम को अगले १ दिन में पूरा करना हो तो ज्ञात कीजिये कि कितने लड़के और उस काम पर लगाने चाहिए।

१९६६

१. एक दूकानदार २ रु० प्रति दर्जन के भाव से २१६ अण्डे खरीदता है। इनमें से कुछ अण्डे टूट जाते हैं और वह शेष को ६ रु० के १५ के भाव से बेच देता हैं। यदि उसे कुल २० प्रतिशत लाभ होता है, तो टूटे हुए अण्डों की संख्या ज्ञात कीजिये।

२. एक बर्तन में दूध और पानी ४ : १ के अनुपात में मिला हुआ है। इस मिश्रण की मात्रा २० किलोग्राम है। ज्ञात कीजिये कि बर्तन में से कितना मिश्रण निकालकर उतना ही पानी मिला दिया जाय कि दूध और पानी का अनुपात ३ : २ हो जाय।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. एक धन चक्रवृद्धि व्याज पर ५ प्रतिशत प्रतिवर्ष व्याज की दर से ३ वर्ष के लिए दिया गया। यदि तीसरे वर्ष के अन्त का मिश्रधन उसी धन के दूसरे वर्ष के अन्त के मिश्रधन से ४८१ रु० अधिक हो तो धन ज्ञात कीजिये।

१९६७

१. एक उत्पादक १० प्रतिशत लाभ से एक विक्रेता को माल बेचता है, और वह २० प्रतिशत लाभ से फुटकर विक्रेता को बेचता है और फुटकर विक्रेता २५ प्रतिशत लाभ से उस माल को खरीदार को ४१ रु० २५ पैसे में बेचता है। उत्पादक की लागत ज्ञात कीजिये।

२. एक धन चक्रवृद्धि व्याज से ४ वर्ष में दुगुना हो जाता है। बताइये कितने समय में वह अपना आठगुना हो जायगा ?

३. एक दूकानदार १ रु० २५ पैसे प्रति किलोग्राम की दर से २०० किलोग्राम, ७५ पैसे प्रति किलोग्राम की दर से ४०० किलोग्राम तथा ५० पैसे प्रति किलोग्राम की दर से ६०० किलोग्राम चावल खरीदता है। इस सबको मिलाकर मिश्रण का $\frac{1}{2}$ भाग १ रु० किलोग्राम की दर से बेचता है। शेष चावल प्रति किलोग्राम किस भाव से बेचे कि उसे पूरी लागत पर २५ प्रतिशत का लाभ हो।

१९६८

१ (क) अ, ब और स में ५,००० रु० इस प्रकार बांटिए कि अ को ब का दुगुना तथा ब को स का तिगुना मिले।

(ख) एक वृत्ताकार और एक वर्गाकार खेत के परिमाप (perimeter) समान हैं। यदि वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल १२,१०० वर्ग मीटर है; तो वृत्ताकार खेत का क्षेत्रफल निकालिए।

२ (क) निम्नलिखित के गुणोत्तर माध्य (Geometric mean) ज्ञात कीजिए :—

२ ८ १२ २४ ५४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) निम्नलिखित बारंबारता बंटन (Frequency Distribution) के लिए समान्तर माध्य (Arithmetic mean) से मध्य विचलन (Meon Deviation) ज्ञात कीजिए।

य (x) :	३	५	७	९	११
व (f) :	२	७	१०	९	५

३ (क) एक मनुष्य ११ टोकरियां, १० रु० में खरीदता है और १० टोकरियाँ ११ रु० में बेचता है। उसे कितने प्रतिशत लाभ होगा ?

(ख) किसी परीक्षा में २०% परीक्षार्थी अंग्रेजी में, २५% गणित में तथा १०% दोनों में फेल हुए, तो दोनों विषयों में कितने प्रतिशत पास होते हैं ? यदि कुल पास होने वालों की संख्या १,३०० हो, तो कुल परीक्षार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

४ (क) मोहन, सोहन और श्याम ने साझे में व्यापार आरम्भ किया। मोहन ने १५०० रु० ५ माह के लिए, सोहन ने १,००० रु० ९ माह के लिए तथा श्याम ने २००० रु० ३ माह के लिए लगाये। यदि अन्त में इन्हें कुल लाभ ७५० रु० हुआ, तो प्रत्येक को क्या मिला।

(ख) एक धन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से २ वर्ष में २,२०५ रु० और ३ वर्ष में २३१५ रु० २५ पैसे हो जाता है। ब्याज की दर व मूलधन निकालिए।

१९६९

१. (क) एक मनुष्य हर महीने अपनी आमदनी का ८४ प्रतिशत खर्च करके २४ रु० बचाता है। उसकी मासिक आमदनी निकालिए।

(ख) ५ मनुष्य ४५ मीटर लम्बी दीवार ९ दिन में बनाते हैं, तो दीवार की ३० लम्बाई ५ दिन में कितने मनुष्य बनायेंगे ?

२. (क) कुछ धन अ, ब, और स तीन मनुष्यों में $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, और $\frac{1}{6}$ के अनुपात से बाँटा गया। अ को ९० रु० मिला। कुल धन तथा ब और स के भाग निकालिए।

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

(ख) ३ रु० २० पैसे प्रति किलो ग्राम चीनी बेचने से एक दूकानदार को ४ प्रतिशत हानि होती है। वह उसे कितने प्रति क्विंटल बेचे कि ५ प्रतिशत लाभ हो।

३. (क) एक व्यक्ति ने डाकखाने के बचत बैंक में १,००० रु० जमा किया। यदि चक्रवृद्धि, ब्याज की दर ३ प्रतिशत सालाना हो, तो तीन वर्ष के अन्त में क्या मिश्रधन होगा ? निकटतम पैसा तक उत्तर निकालिए।

(ख) एक वृत्त का क्षेत्रफल २४. ६४ वर्ग संटी मीटर है। उसकी परिधि निकालिए। ($\pi = \frac{२२}{७}$)

४. नीचे सारणी में १०८ छात्रों द्वारा एक परीक्षा में प्राप्त अंकों का बारंबारता बंटन (Frequency distribution) दिया हुआ है। समान्तर माध्य (Arithmetic mean) निकालिए।

वर्ग अंतराल ...	०–१०	१०–२०	२०–३०	३०–४०	४०–५०	५०–६०	६०–७०	७०–८०
बारंबारता ...	१०	१४	१६	१४	११	१३	१७	१३

५. (क) १३ आदमी ६ दिन, ८ औरतें ५ दिन और ५ लड़के ४ दिन काम करके कुल ५५० रु० कमाते हैं। एक आदमी, एक औरत और एक लड़के की मजदूरी में ५ : ३ : २ का अनुपात है। एक आदमी की एक दिन की मजदूरी क्या है ?

(ख) निम्नलिखित सारणी में एक छात्रावास के छात्रों का मासिक दूध पर खर्च दिया हुआ है। मानक विचलन (Standand deviation) निकालिए।

रुपयों में खर्च ...	०–५	५–१०	१०–१५	१५–२०	२०–२५
छात्र संख्या ...	६	१०	१२	[illegible]	८

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उत्तर

१९६२

१. ८० रु० । २. (अ) २०० रन, (ब) ३२८ रन ।

१९६३

१. ३५% । २. १६ २/३% । ३. ५५० रु० ।

१९६४

१. ६१०० रु० । २. ४%, २५०० रु० । ३. ३२ रु० २० पैसे २४ रु० १५ पैसे, १६ रु० १० पैसे ।

१९६५

१. ५०० रु० । २. २७० किग्रा । ३. १२ लड़के ।

१९६६

१. ३६ अण्डे । २. ५ किग्रा । ३. ८००० रु० ।

१९६७

१. २५ रु० । २. १२ वर्ष । ३. ७५ पैसे प्रति किलोग्राम ।

१९६८

१. (क) ३००० रु० १५०० रु०, ५०० रु० (ख) १५४०० वर्गमीटर ।
२. (क) १२ (ख) स० मा०=७·४८, माध्य विचलन=१·८९१
३. (क) २१% (ख) ६५%, २००० विद्यार्थी
४. (क) २५० रु०, ३०० रु०, २०० रु०
(ख) २००० रु०, ५% ।

१९६९

१. (क) १५० रु० (ख) ६ मनुष्य २. (क) (अ) १९५ रु०, व ६० रु०, स, ४५ रु० (ख) ३५० रु० प्रति क्विटल ३. (क) १०९२ रु० ७२पै० (ख) १७·६ सेमी० ४. ४१·११ ५. (क) ५ रु० (ख) ६·४१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

उत्तरमाला

अंकगणित

प्रश्नावली १ (क)

१. (क) २ : ५ (ख) ४ : ३ (ग) १ : ८ (घ) १२५ : ६,
(च) ७:१६ (छ) ९:५

२. (क) ६:७ (ख) पहला अनुपात

३. ६ ४. पहले का ५. धोती

६. राम १५ ग्राम, श्याम ३६ ग्राम। ७. ८४०, १०५० कि० मी० ३७८, किमी०।

८. ९६०२, ९. १४४, १२०

१०. मान बढ़ेगा, मान घटेगा। ११. १८ : ५

१२. ६ : ५ १३. मोहन १६० रु० सोहन ४० रु०

१४. २५ रु०

१५. २५३ : ३७७ १६. नहीं

१७. २० लीटर १८. ९·३७५ शिलिंग

प्रश्नावली १. (ख)

१. (क) १५ (ख) ११ १/७ (ग) २ ५/७ (घ) ३०

२. (क) ८ (ख) १४ (ग) ९

३. (क) १५० (ख) ·८२५ (ग) ७ १/५

४. (क) २२ १/२ (ख) १५ मिनट (ग) २८० दिन

५. २८ वर्ष ६. ७० सेमी० ७. ७२ फीट

८. २० बीघा ९. ३०० रु० १०. ४० रु०

११. २९:१५ १२. ५५:३७ १३. २५:९

१४. ४ १५. ५

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली १ (ग)

१. ६१ रु० ५० पै० २. २२$\frac{८}{९}$ घन्टा ३. ३०० रु०
४. १२ लिटर ५. ४५० रु० ६. २००० गैलन
७. १७५० रु० ८. ५ घंटा १६ मिनट ९. १५०० रु०

प्रश्नावलीं १(घ)

१. ६ रु० ५० पै० २. ३३$\frac{१}{३}$ मील प्रति घन्टा ३. १२४८
४. १६ दिन ५. ४० दिन ६. ३ क्विंटल
७. ३२० ८. २००० ९. १०$\frac{२}{३}$ दिन
१०. ८३३$\frac{१}{३}$ घन सेमी० ११. ३० दिन

प्रश्नावली १. (च)

१. ६$\frac{२}{३}$ दिन २. ५२$\frac{१}{२}$ दिन ३. ७$\frac{१}{२}$ दिन
४. ४$\frac{१}{२}$ घन्टा ५. ६० दिन ६. ३१ रु० २५ पै०
७. ७५ आदमी ८. २$\frac{५}{६}$ दिन ९. ४५ दिन
१०. ६ आदमी ११. १६ चक्कर १२. ३०० रु०, १०० रु०
१३. ६ रु० २५ पै०, ३ रु० ७५ पै०, २ रु० ५० पै०
१४. ९$\frac{१}{३}$ छटांक १५. ३६० पृष्ट १६. ५६$\frac{१}{४}$ दिन

प्रश्नावली १. (छ)

१. ६० रु०, ९० रु०
२. ३·७२ रु०, ४·९६ रु०, ६·२० रु०, ७·४४ रु०
३. ५५, ८५, ९५ ४. ७० मी०, ३५ मी०, २० मी०
५. ३ पौ०, १ पौ०·७ शि०, ४ पौ० १० शि० ६. २५० रु०
७. ३६० रु०, १२० रु०, ३० रु०
८. १९२ रु०, २४० रु०, २८० रु०, ३१५ रु०
९. ४८ रु०, ७२ रु०, ९० रु०, १०. १००, २५०, ३५०
११. ३००, ४५०, ९००, २१०० १२. १५००, ७५०, ३००
१३. १५०, ४८०, ६००, ३३० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१४. २२ रु० ५० पै०, १५ रु० १२, रु०

१५. १८० रु०, १२० रु०, ३३ ५ रु०

१६. ३ विषय १७. ६२ १८. २६०

प्रश्नावली २

१. २८० रु०, ४८० रु०, २. १२० रु०, १८० रु०, १४० रु०

३. ६०० रु०, १५००रु०, २१०० रु० ४. ६० रु०, ४० रु०, १०० रु०

५. ४०० रु०, ४८० रु०, ६. ३०० रु०, २०० रु० १५० रु०

७. ५०४ रु० ८. २०५ रु० ५० पैसे, १८० रु० ६० पैसे

९. ४६० रु०, १४० रु०, १६८ रु०

१०. ५००रु०, ७५० रु० १२५० रु०

११. १५०० रु०, २४० रु०, २०० रु०, १०० रु०

१२. ७५ रु०, १०० रु०, १२५ रु०, १३. २४० रु०, ३६० रु०, ४८० रु०

१४. १६० रु०, १५० रु०, १४० रु० १५. ७५० रु० २५० रु०, ५०० रु०

१६. १५३ रु०, २७२ रु०, ५१० रु० १७. ७५० रु०

१८. २८८ रु०, ५७६ रु०, ५७६ रु० १९. १७५० रु०

२०. १२० रु०, २७० रु०, २४० रु० २१. ४० रु०, ८० रु०, १६० रु०

२२. २४ रु०, ६० रु०, ६६ रु०, २३. ७३६ रु०

२४. २००० रु०, २६७५ रु०, ४२०० रु०,

प्रश्नावली ३ (क)

१. ७५%, ४०%, २४%, २·५%, ३०%

२. $\frac{१}{२०}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{५}{१६}$, ·०१७५ ३. ·१२, ·३७, ·०३, ·०१०५

४. १७५ रु०, ४ रु० ३० पैसे, २·७६ मीटर, १२६ रु०

५. (क) २०%, (ख) १२·५% (ग) ९$\frac{१}{११}$% (घ) ·१% (च) २०००%

६. (क) २००० रु० (ख) ११% (ग) १ सेमी०

७. ५०० ८. ८०० ९. ३,००,०००

१०. १५० रु० ११. ११५७६२५ १२. २०००००

१३. [illegible] १४. [illegible]% १५. [illegible]%

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१६. ३ किलो ग्राम   १७. २५० ग्राम   १८. ९ $\frac{१}{११}$%

१९. २०%   २०. ८० कि० मी० प्रति घन्टा

प्रश्नावली ३ (ख)

१. १६ $\frac{२}{३}$%   २. २३ $\frac{१}{१३}$%   ३. २०%.   ४. ४२ $\frac{६}{७}$%

५. २५%   ६. १ रु० में १९   ७. एक रुपये में ७ ग्राम

८. १ रु० में ६४   ९. १ रु० में ३०   १०. १ रु० में ४

११. पुरुष ४००० स्त्रियाँ १००००   १२. ५ : ४

१३. स्त्रियाँ ४०००० बच्चे ३००००   १४. १४०० रु०, १०२५ रु०

१५. प्रत्येक का २५० रु०   १६. ५०००   १७. ८ $\frac{१६}{२३}$%

१८. ८५%   १९. १२००   २०. ६०%   २१. २००

२२. ८००

प्रश्नावली ४ (क)

१. (क) लाभ ४% (ख) हानि १०% (ग) लाभ १४ $\frac{२}{७}$% (घ) .८%

२. (क) १६८० रु० (ख) १८९ रु० (ग) ११ रु० ५५ पै० (घ) २०० रु०

३. (क) १५० रु० (ख) ५० रु० (ग) ५ रु० (घ) २०० रु०

४. २०%   ५. १६ $\frac{२}{३}$%   ६. ३० रु० प्रति क्विंटल

७. ५४६ रु०   ८. २५ रु०   ९. १० रु०

१०. २१%   ११. ८ $\frac{७३}{१०४}$%   १२. १०%

१३. ५६५० रु०   १४. १०३५ रु०   १५. ७८४० रु०

१६. ५०० रु०   १७. ५०२०० रु०   १८. १०० रु०

१९. ३५२ रु०   २०. २ $\frac{२}{४९}$% हानि   २१. ७५ रु० प्रति भेंड़

२२. ५ ग्राम   २३. ४०० रु०

प्रश्नावली ४ (ख)

१. ४० रु०, २५ रु०   २. १२ $\frac{१}{२}$%   ३. ८%

४. १६ $\frac{२}{३}$%   ५. २०%   ६. २०%, ४ रु०

७. ६६ $\frac{२}{३}$ पै० प्रति किलो   ८. ३३ $\frac{१}{३}$%   ९. ५%।

१०. ११ $\frac{१}{९}$%   ११. २०%   १२. ४ $\frac{१}{६}$%

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

१३. १५%
१४. २०% ४$\frac{१}{२}$ रु०
१५. २५%
१६. १३$\frac{७}{११}$%, ६६ रु०
१७. ८$\frac{१}{३}$%
१८. १०$\frac{१०}{११}$%
१९. २$\frac{२}{४९}$%
२०. ३२$\frac{१}{४}$%
२१. २२$\frac{३}{९}$%
२२. ८० रु०
२३. २० रु०
२४. ३०० रु०
२५. १४० रु०
२६. ५००० रु०
२७. ४०० रु०, ६०० रु०
२८. १० रु०
२९. ५ रु०, या १५ रु०
३०. ५० रु०, या ३५० रु०
३१. २ : ३
३२. ४०० ग्राम
३३. ५३ रु० का ४० किलो
३४. $\frac{१}{२}$% लाभ
३५. ३०० रु०, ४०० रु०
३६. ३६० रु०, ३०० रु०
३७. ४५० रु०, ४०० रु०
३८. ७५%
३९. २० रु०, २५ रु०
४०. २·५ रु० प्रति किलो, २ रु० प्रति किलो
४१. ८ पै० प्रति ग्राम, १० पै० प्रति ग्राम
४२. ३३$\frac{१}{३}$%
४३. १०$\frac{१०}{११}$%
४४. १०० रु०, १४५ रु०
४५. ५$\frac{५}{३९}$ रु० हानि

प्रश्नावली ५ (क)

१. ७८८ रु० १२$\frac{१}{२}$ पै०
२. २९८२ रु० २० पै०
३. ६०६·६८२ रु०
४. १२६·८९६९६ रु०
५. १६३·०३१ रु०
६. ३७०४ रु० ४० पै०
७. ५५१·६१६ रु०
८. ९०५·१२६५ रु०
९. १७०२·३६६ रु०
१०. १२६१ रु०
११. ११ रु० ७ पै०
१२. २९२४६४·६४
१३. १·९२१९२ मीटर
१४. १२६·८२५ रु०, १२७० रु०

प्रश्नावली ५ (ख)

१. २००० रु०
२. ६४० रु०
३. ५००० रु०
४. ५०६२५ रु०
५. १०४८५७६ रु०
६. ४६८७५ रु०
७. १०००००
८. १०० रु०
९. ३१५ रु०
१०. ६२५० रु०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ५ (ग)

१. ५%   २. १०%   ३. ३३⅓%
४. १०%   ५. १००%   ६. ५%
७. २½%   ८. चक्रवृद्धि ब्याज ४%

प्रश्नावली ५ (घ)

१. ३ वर्ष,   २. ४ वर्ष,   ३. २ वर्ष
४. ४ वर्ष   ५. १½ वर्ष,   ६. ३½ वर्ष

प्रश्नावली ५ (च)

१. ६००० रु०   २. ४%, ५००० रु०   ३. १०%
४. २ वर्ष   ५. ६⅔%, ४५०० रु०   ६. १०%, ६००० रु०
७. १०० रु०, १०%   ८. २५०,००० रु०   ९. २००० रु०, ४%
१०. १२५० रु०, ४%   ११. ३३७५ रु०   १२. ८८२० रु०
१३. ४५६९७६ रु०   १४. ८००० रु०   १५. २२५० रु०
१६. १६५५ रु०   १७. २५ (√११ — ३)% या ७·९०% लगभग
१८. ३३१० रु०   १९. ५%, ४००० रु०
२०. १५०० रु०, २३४३ रु० ७५ पै०
२१. ४००० रु०, ४२४०० रु०
२२. २३ : २०   २३. ३२००० रु०
२४. १⅔%

प्रश्नावली ६ (क)

१. ४७·१४ सेमी०   २. ७० सेमी०,   ३. ३६ २/७ रु०
४. ३३ इञ्च   ५. ७/४४ इञ्च   ६. ७३ ३७/९९ मील प्रति घंटा
७. २० चक्कर   ८. २३४ ३/७ सेमी०   ९. ७५ चक्कर
१०. ४४ मीटर

प्रश्नावली ६ (ख)

१. (क) ६१६ वर्ग सेमी०   (ख) ३८·५ वर्ग मी०   (ग) १४/९९ वर्ग मी०
२. (क) ७√३ सेमी०   (ख) ७ मी०   (ग) ३५ मी०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

३. १३८६ वर्ग सेमी ४. १७ सेमी० ५. ६६ रु०

६. १४ : ११ ७. $\sqrt{\pi}$: २ ८. ३३० वर्ग सेमी०

९. २ मीटर १०. ४ सेमी० ३ सेमी० ११. ४ मीटर

१२. १२१ सेमी० १३. ६३$\sqrt{२}$ मीटर

१४. ९·०४ मीटर भीतरी भाग की त्रिज्या

१५. ९·५६ सेमी १६. १३·७२ वर्ग सेमी०

१७. २५२ वर्ग सेमी० १८. २५२ वर्ग मीटर

२०. $\sqrt{८२}$ सेमी० २१. $\sqrt{२}$:१

प्रश्नावली ६ (ग)

१. (क) १३४$\frac{२}{२५}$ वर्ग सेमी० (ख) ३·०८ वर्ग समी०

२. ३५·८° ३. $\frac{१६}{५१}\sqrt{२२}$ सेमी०

४. २१० वर्ग सेमी० ५. २१६°

६. ४८·०६ गज ७. $\frac{७\sqrt{३}-११}{२८}$ वर्ग सेमी०

८. ७१π वर्ग सेमी० ९. $\frac{१}{१२}$ (१०० π − १५$\sqrt{३}$) वर्ग सेमी०

१०. (क) २५२ वर्ग सेमी० (ख) ७० वर्ग सेमी०

(ग) ३·५७ वर्ग सेमी० (घ) $\frac{१४}{३}$ (२१$\sqrt{३}$—२२) वर्ग सेमी०

(च) ९८ $\frac{७}{२८}$ वर्ग सेमी० (छ) ४४८ वर्ग सेमी०

सांख्यिकी

प्रश्नावली ३

९. अपवर्जी रीति

सम्भागान्तर	आवृत्ति
०—१०	३
१०—२०	९
२०—३०	९
३०—४०	१३
४०—५०	१४

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

५०—६०	१३
६०—७०	१२
७०—८०	१४
८०—९०	६
९०—१००	४

समावेशिक रीति से भी यही उत्तर आयेगा।

१०. अपवर्जी रीति

सम्भागान्तर	आवृत्ति
०—१०	०
१०—२०	२
२०—३०	३
३०—४०	७
४०—५०	३
५०—६०	११
६०—७०	८
७०—८०	७
८०—९०	५
९०—१००	४

११.

सम्भागान्तर	आवृत्ति
०—१०	१
१०—२०	०
२०—३०	३
३०—४०	३
४०—५०	७
५०—६०	११
६०—७०	१४
७०—८०	२०
८०—९०	१५
९०—१००	६

१२.

सम्भागान्तर	आवृत्ति
६०—६५	२३
६५—७०	२६
७०—७५	१

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

प्रश्नावली ४

६. ५५·७ इञ्च   ७. १०८·४ पौं०

८. स० मा०=११९·६, गु० मा०=५५·४, ह० मा०=२८·८

९. ६२·८१ रु०   १०. १३८·७८ पौं०

११. स० मा० = १४५३·३ घं०, माध्यिका = १३/०·२ घं०, भूयिष्ठक =१२२६·६ घं०

१२. महाविद्यालय अ तथा ब में से प्रत्येक का भारित माध्य=७३·७५

१३. २८ रु०

१४. ५७ रु०

१५. भूयिष्ठक=६·५"

१६. स० मा०=३०'१", माध्यिका=३१'११", भूयिष्ठक=३३'६"

१७. स० माध्य (भारत)=२५·३३ स० माध्य (इंगलैण्ड)=२९·६२

१८. कक्षा अ माध्यिका = १८·५, कक्षा ब माध्यिका=१९·१७
कक्षा ब अच्छी है।

१९. भा० मा० २१४·४२ रु०

२०. स० मा० २१·६७ गु० मा ११८·८२, ह० मा० १५·१

२१. मू० २५·३, म० २४·७७५

२२. स० मा० ३·१०, भा० मा० २·४०

प्रश्नावली ६

३. म० वि०=२·८८, प्र० वि०=३·६८

४. म० वि०=७·९९, प्र० वि०=९·४

५. म० वि०=१·६, प्र० वि०=१·९९
वि० गु०=२३·४

६. म० वि०=८, प्र० वि०=१०·९
विचरण मायांक=१२०

७. मध्यक=२८·५, म० वि०=१०·५
प्र० वि०=१२·३

८. प्र० वि०=५·२४, प्रमाप विभ्रम=१·१७

९. १५·६

१०. ७·५

११. २·०२

१२. ५·१

१३. ६३·८९ सेमी०, १·६ सेमीं०

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi

CC0.In Public Domain. Digitized by Sarayu Trust/eGangotri

Ganesh Varni Digambar Jain Institute, Naria, Varanasi